

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

**Aufgabe:** Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x \ln x - x$ . Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Verhaltens für betragsmäßig große  $x$ , auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

**Lösung:** I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion  $f(x)$  die folgende Vorgehensweise:

<b>Kurvendiskussion</b>
Differenzierbare Funktion: $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit Funktionsterm $y = f(x)$ , $D_f$ als maximale Definitionsmenge (als $\mathbf{R}$ [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nenner-nullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$ , $f''(x)$ , $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung $f(x) = 0$ lösen): $f(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow N(x_1 0), N(x_2 0), \dots$
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$ ; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$ ; ...
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow P_1(x_1 f(x_1)), P_2(x_2 f(x_2)), \dots$
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$ ; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$ ; ...
IVa. Sattelpunkte $x_0$ liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge $D_f \rightarrow$ Randstellen der Definitionsmenge $D_f \Rightarrow$ Definitionslücken $x_1, x_2, x_3 \dots$ b) $x \rightarrow x_1, x > x_1: f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_1, x < x_1: f(x) \rightarrow -\infty$ oder: $x \rightarrow x_1, x > x_1: f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_1, x < x_1: f(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow x_1$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x \rightarrow x_2, x > x_2: f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_2, x < x_2: f(x) \rightarrow +\infty$ oder: $x \rightarrow x_2, x > x_2: f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_2, x < x_2: f(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow x_2$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x \rightarrow x_3: f(x) \rightarrow r \Rightarrow x_3$ (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert $r$
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$ : $f(x)$ monoton steigend ( $x_1$ als Hochpunkt, $f'(x_0) > 0$ ) oder monoton fallend ( $x_1$ als Tiefpunkt, $f'(x_0) < 0$ ); – Monotonieintervall $(x_1, x_2)$ : $f(x)$ monoton fallend ( $x_1$ als Hochpunkt, $x_2$ als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0) < 0$ ) oder monoton steigend ( $x_1$ als Tiefpunkt, $x_2$ als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0) > 0$ ); ... – Monotonieintervall $(x_n, \infty)$ : $f(x)$ monoton fallend ( $x_n$ als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0) < 0$ ) oder monoton steigend ( $x_n$ als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0) > 0$ )
Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach IV.]; bei Wendepunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$ : $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0) > 0$ ) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0) < 0$ ); – Krümmungsintervall $(x_1, x_2)$ : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$ ) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$ ); ... – Krümmungsintervall $(x_n, \infty)$ : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit

Linkskrümmung,  $f''(x_0) < 0$ ) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung,  $f''(x_0) > 0$ )

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

#### VIII. Symmetrie:

- a) Achsensymmetrie zur y-Achse:  $f(-x) = f(x)$  (gerade)
- b) Punktsymmetrie zum Ursprung:  $f(-x) = -f(x)$  (ungerade)
- c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
- d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
- d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
- e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion  $f(x)$ :  $f(x)$  achsensymmetrisch  $\rightarrow f'(x)$  punktsymmetrisch  $\rightarrow f''(x)$  achsensymmetrisch usw.;  $f(x)$  punktsymmetrisch  $\rightarrow f'(x)$  achsensymmetrisch  $\rightarrow f''(x)$  punktsymmetrisch usw.
- f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

#### IX. Verhalten für betragsmäßig große $x$ ( $x \rightarrow \infty$ , $x \rightarrow -\infty$ ) bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs:

a)  $f(x)$  als ganz rationale Funktion ( $n$  als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n > 0$	$n$ ungerade	$n$ gerade	$a_n < 0$	$n$ ungerade	$n$ gerade
$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$

b)  $f(x)$  als gebrochen rationale Funktion ( $n$  als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler,  $m$  als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

- $x \rightarrow \pm\infty$ :  $f(x) \rightarrow 0 = y$  ( $n < m$ )
- $x \rightarrow \pm\infty$ :  $f(x) \rightarrow a/b = y$  ( $n = m$ ;  $a, b$  Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
- $x \rightarrow \pm\infty$ :  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  ( $n > m$ )

mit  $y$  als waagerechter Asymptote.

c)  $f(x)$  mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil,  $y = e^x$ ,  $D_y = \mathbf{R}$ :

- $x \rightarrow -\infty$ :  $e^x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ :  $e^x \rightarrow +\infty$
- $x \rightarrow -\infty$ :  $f(x) = ae^{bx+c} + d \rightarrow \pm\infty$  ( $b < 0$ ),  $\rightarrow d = y$  ( $b > 0$ );  $x \rightarrow +\infty$ :  $f(x) = ae^{bx+c} + d \rightarrow d = y$  ( $b < 0$ ),  $\rightarrow \pm\infty$  ( $b > 0$ )
- $x \rightarrow -\infty$ :  $f(x) = (a_n x^n + \dots)e^{bx} \rightarrow \pm\infty$  ( $b < 0$ ),  $\rightarrow 0 = y$  ( $b > 0$ );  $x \rightarrow +\infty$ :  $f(x) = (a_n x^n + \dots)e^{bx} \rightarrow 0 = y$  ( $b < 0$ ),  $\rightarrow \pm\infty$  ( $b > 0$ )

mit  $y$  als waagerechter Asymptote.

d)  $f(x)$  mit natürlicher Logarithmusfunktion als Anteil;  $y = \ln(x)$ ,  $D_y = (0; +\infty)$ :

- $x \rightarrow 0$ :  $\ln(x) \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ :  $\ln(x) \rightarrow +\infty$
- $x \rightarrow 0$ :  $f(x) = x^a \ln(x) \rightarrow 0$  ( $a > 0$ )
- $x \rightarrow +\infty$ :  $f(x) = \ln(x)/x^a \rightarrow 0 = y$  ( $a > 0$ )

mit  $y$  als waagerechter Asymptote.

### Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion  $f(x) = x \ln x - x$  ist eine Funktion des natürlichen Logarithmus (und Stammfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion):

1)  $f(x)$  ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen Definitionsbereich  $D_f = (0; +\infty)$ .

2) Verhalten an den Randstellen des Definitionsbereichs:  $x \rightarrow 0$ :  $f(x) \rightarrow 0$  (hebbare Unstetigkeitsstelle);  $x \rightarrow +\infty$ :  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

3) Ableitungen werden nach der Potenz-, Summen- und Produktregel gebildet: Funktion  $f(x) \rightarrow$

1. Ableitung:  $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

2. Ableitung:  $f''(x) = \frac{1}{x}$

3. Ableitung:  $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

4) Nullstellen:  $f(x) = x \ln x - x = 0 \rightarrow [x = 0]$ ,  $x = e \rightarrow$  Nullstelle  $N(e|0)$ .

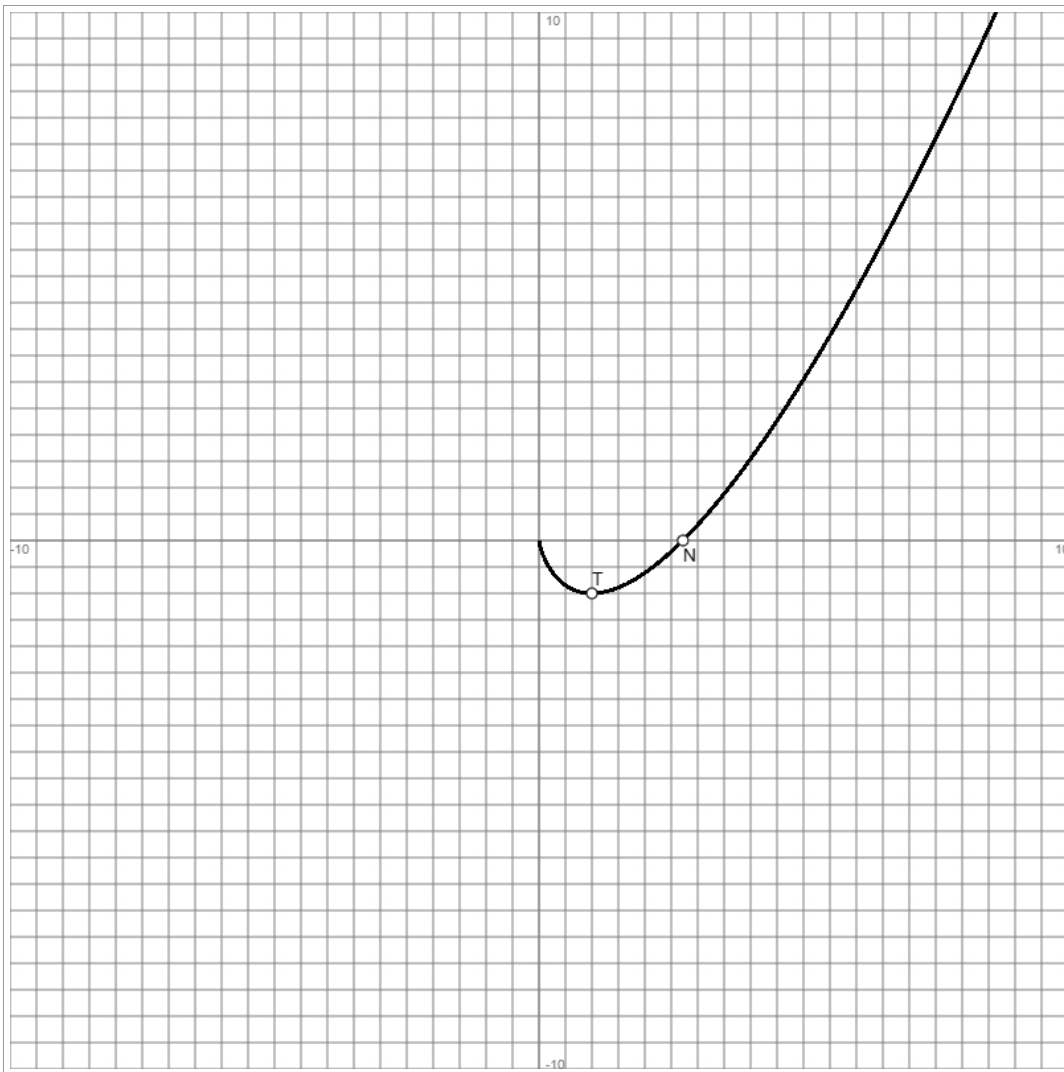
5) Tief-, Hochpunkte:  $f'(x) = \ln x = 0 \rightarrow x = 1$  mit:  $f''(1) > 0$ ,  $f(1) = -1 \rightarrow$  Tiefpunkt  $T(1|-1)$ .

6) Wendepunkte:  $f''(x) = \frac{1}{x} = 0 \rightarrow$  keine Lösung  $\rightarrow$  kein Wendepunkt.

III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	(0)	-	-	Hebbare Unstetigkeitsstelle $N(0 0)$
0.5	-0.8466	-0.69	2	
1	-1	0	1	Tiefpunkt $T(1 -1)$
1.5	-0.8918	0.41	0.67	
2	-0.6137	0.69	0.5	
2.5	-0.2093	0.92	0.4	
2.718	-0.0003	1	0.37	Nullstelle $N(2.72 0)$
3	0.2958	1.1	0.33	
3.5	0.8847	1.25	0.29	
4	1.5452	1.39	0.25	
4.5	2.2683	1.5	0.22	
5	3.0472	1.61	0.2	
5.5	3.8761	1.7	0.18	
6	4.7506	1.79	0.17	
6.5	5.6667	1.87	0.15	
7	6.6214	1.95	0.14	
7.5	7.6118	2.01	0.13	
8	8.6355	2.08	0.13	
8.5	9.6906	2.14	0.12	
9	10.775	2.2	0.11	
9.5	11.8873	2.25	0.11	
10	13.0259	2.3	0.1	

Graph: Funktion  $f(x)$



[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 01.2023 / Aufgabe 1775