Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Definitionsbereichs, des Verhaltens für betragsmäßig große x, auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1\|0)$, $N(x_2\|0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1\|f(x_1))$, $P_2(x_2\|f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) $x\to x_1$, $x>x_1$: $f(x) \to +\infty$, $x\to x_1$, $x<x_1$: $f(x) \to -\infty$ oder: $x\to x_1$, $x>x_1$: $f(x) \to -\infty$, $x\to x_1$, $x<x_1$: $f(x) \to +\infty$ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x\to x_2$, $x>x_2$: $f(x) \to +\infty$, $x\to x_2$, $x<x_2$: $f(x) \to +\infty$ oder: $x\to x_2$, $x>x_2$: $f(x) \to -\infty$, $x\to x_2$, $x<x_2$: $f(x) \to -\infty$ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x\to x_3$: $f(x) \to r$ => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0)<0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0)>0$); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0)<0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$); …

– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs:
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade	$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y (n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil, $y = e^x$, D_y = **R**:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: $f(x) = ae^{bx+c} + d$ -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: $f(x) = ae^{bx+c} + d$ -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

d) f(x) mit natürlicher Logarithmusfunktion als Anteil; y = ln(x), D_y = (0; +∞):

x->0: ln(x) -> -∞, x-> +∞: ln(x) -> +∞
x->0: $f(x) = x^a\ln(x)$ -> 0 (a>0)
x->+∞: $f(x) = \ln(x)/x^a$ -> 0 = y (a>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ ist ein Produkt von Wurzel- und Exponentialfunktion:

1) f(x) ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen <u>Definitionsbereich</u> D_f = [0; +∞).

2) <u>Verhalten an den Randstellen des Definitionsbereichs</u>: x -> +∞: f(x) -> 0 (= y als waagerechte Asymptote).

3) Ableitungen werden nach der Potenz-, Summen- und Produktregel zusammen mit der Ableitungsregel für die quadratische Wurzelfunktion: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ gebildet: Funktion f(x) ->

1. Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} + \sqrt{x}\cdot(-e^{-x}) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x}$

2. Ableitung: $f''(x) = \left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\cdot(-e^{-x}) = \left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^{-x}$

3. Ableitung: $f'''(x) = \left(\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-x} - \left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^{-x}$.

4) Nullstellen: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$ = 0 -> x = 0 -> Nullstelle N(0|0).

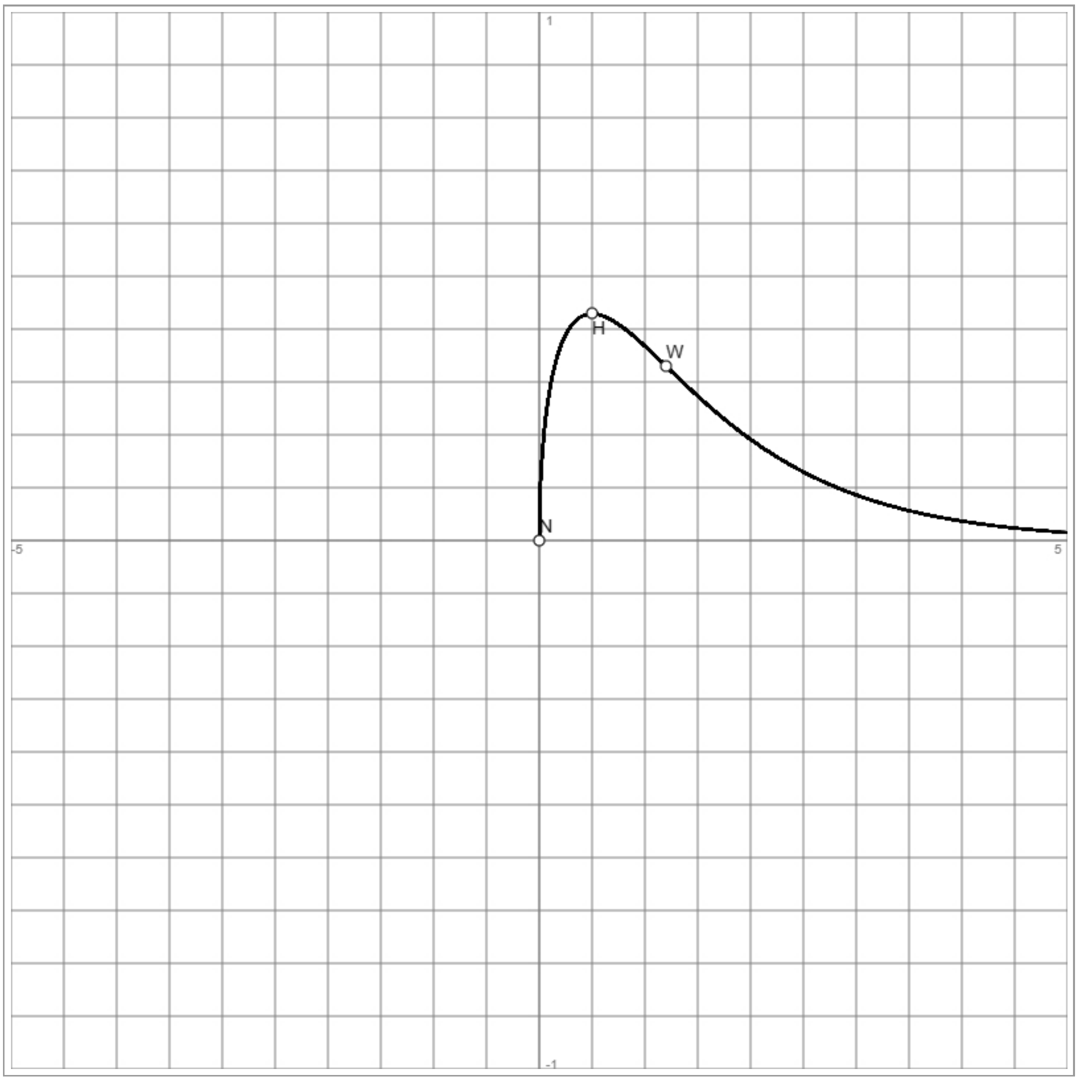
5) Tief-, Hochpunkte: $f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)e^{-x}$ = 0 ⇔ $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ = 0 ⇔ 1 – 2x = 0 ⇔ 1 = 2x ⇔ x = 0,5 mit: f‘‘(0,5) < 0, f(0,5) = $\sqrt{\frac{1}{2e}}$ -> Hochpunkt H(0,5|$\sqrt{\frac{1}{2e}}$).

6) Wendepunkte: $f''(x) = \left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)e^{-x}$ = 0 ⇔ $-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$ = 0 ⇔ -1 – 4x + $4x^2$ = 0 ⇔ $x_{1,2}$ = $\frac{4 \pm \sqrt{32}}{8} = 0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{2}$ -> x = 0,5(1+√2) mit: f‘‘‘(0,5(1+√2)) ≠ 0, f(0,5(1+√2)) = $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2e^{1+\sqrt{2}}}}$ -> Wendepunkt W(0,5(1+√2)|$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2e^{1+\sqrt{2}}}}$).

III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
0	0	-	-	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.5	0.4289	0	-0.86	Hochpunkt H(0.5|0.43)
1	0.3679	-0.18	-0.09	
1.2	0.3299	-0.19	0	Wendepunkt W(1.2|0.33)
1.5	0.2733	-0.18	0.06	
2	0.1914	-0.14	0.08	
2.5	0.1298	-0.1	0.07	
3	0.0862	-0.07	0.06	
3.5	0.0565	-0.05	0.04	
4	0.0366	-0.03	0.03	
4.5	0.0236	-0.02	0.02	
5	0.0151	-0.01	0.01	

Graph: Funktion f(x)



www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Aufgabe 1792