Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x} - 4e^{-0,5x} + 4$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Verhaltens für betragsmäßig große x, auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: f‘(x), f“(x), f‘“(x)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1 \mid 0)$, $N(x_2 \mid 0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f‘(x) = 0 lösen, Lösungen in f“(x) einsetzen): a) f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f“(x_1) < 0 -> $H(x_1 \mid f(x_1))$ oder f“(x_1) > 0 -> $T(x_1 \mid f(x_1))$; f“(x_2) < 0 -> $H(x_2 \mid f(x_2))$ oder f“(x_2) > 0 -> $T(x_2 \mid f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung f‘(x) = 0 lösen): f‘(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1 \mid f(x_1))$, $P_2(x_2 \mid f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung f“(x) = 0 lösen, Lösungen in f‘“(x) einsetzen): a) f“(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f‘“(x_1) ≠ 0 -> $W(x_1 \mid f(x_1))$; f‘“(x_2) ≠ 0 -> $W(x_2 \mid f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f‘(x_0) = 0, f“(x_0) = 0, f‘“(x_0) ≠ 0 -> $S(x_0 \mid f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) x->x_1, x>x_1: f(x) -> +∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> -∞ oder: x->x_1, x>x_1: f(x) -> -∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) x->x_2, x>x_2: f(x) -> +∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> +∞ oder: x->x_2, x>x_2: f(x) -> -∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) x->x_3: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f‘(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f‘(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f‘(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f‘(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f‘(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f‘(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f“(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f“(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f“(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f“(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit

Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs:
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade	$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞	x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞	x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y	(n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y	(n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞	(n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil, $y = e^x$, D_y = **R**:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: $f(x) = ae^{bx+c} + d$ -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: $f(x) = ae^{bx+c} + d$ -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x) = e^{-x} - 4e^{-0,5x} + 4$ ist eine natürliche Exponentialfunktion:

1) f(x) ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen <u>Definitionsbereich</u> D_f = **R**.

2) <u>Verhalten an den Randstellen des Definitionsbereichs</u>: x -> -∞: $f(x) = e^{-0,5x}(e^{-0,5x}-4)+4$ -> +∞;
x -> +∞: f(x) -> 4 (= y als waagerechte Asymptote).

3) <u>Ableitungen</u> werden nach der Exponential-, Faktor- und Summenregel gebildet: Funktion f(x) ->

1. Ableitung: $f'(x) = -e^{-x} + 2e^{-0,5x}$

2. Ableitung: $f''(x) = e^{-x} - e^{-0,5x}$

3. Ableitung: $f'''(x) = -e^{-x} + 0,5e^{-0,5x}$.

4) <u>Nullstellen</u>: $f(x) = e^{-x} - 4e^{-0,5x} + 4 = (e^{-0,5x} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,5x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,5x} = 2 \Leftrightarrow$
$-0,5x = \ln(2) \Leftrightarrow x = -\ln(4)$ -> Nullstelle N(-ln(4)|0).

5) <u>Tief-, Hochpunkte</u>: $f'(x) = -e^{-x} + 2e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow -e^{-0,5x} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = e^{-0,5x} \Leftrightarrow \ln(2) = -0,5x \Leftrightarrow$
x = -ln(4) mit: f''(-ln(4)) > 0, f(-ln(4)) = 0 -> Tiefpunkt T(-ln(4)|0), auch als Nullstelle (s. 4))

6) Wendepunkte: $f''(x) = e^{-x} - e^{-0,5x}$ = 0 ⬄ $e^{-0,5x} - 1 = 0$ ⬄ $e^{-0,5x} = 1$ ⬄ -0,5x = 0 ⬄ x = 0 mit: f'''(0) ≠ 0, f(0) = 1 -> Wendepunkt W(0|1).

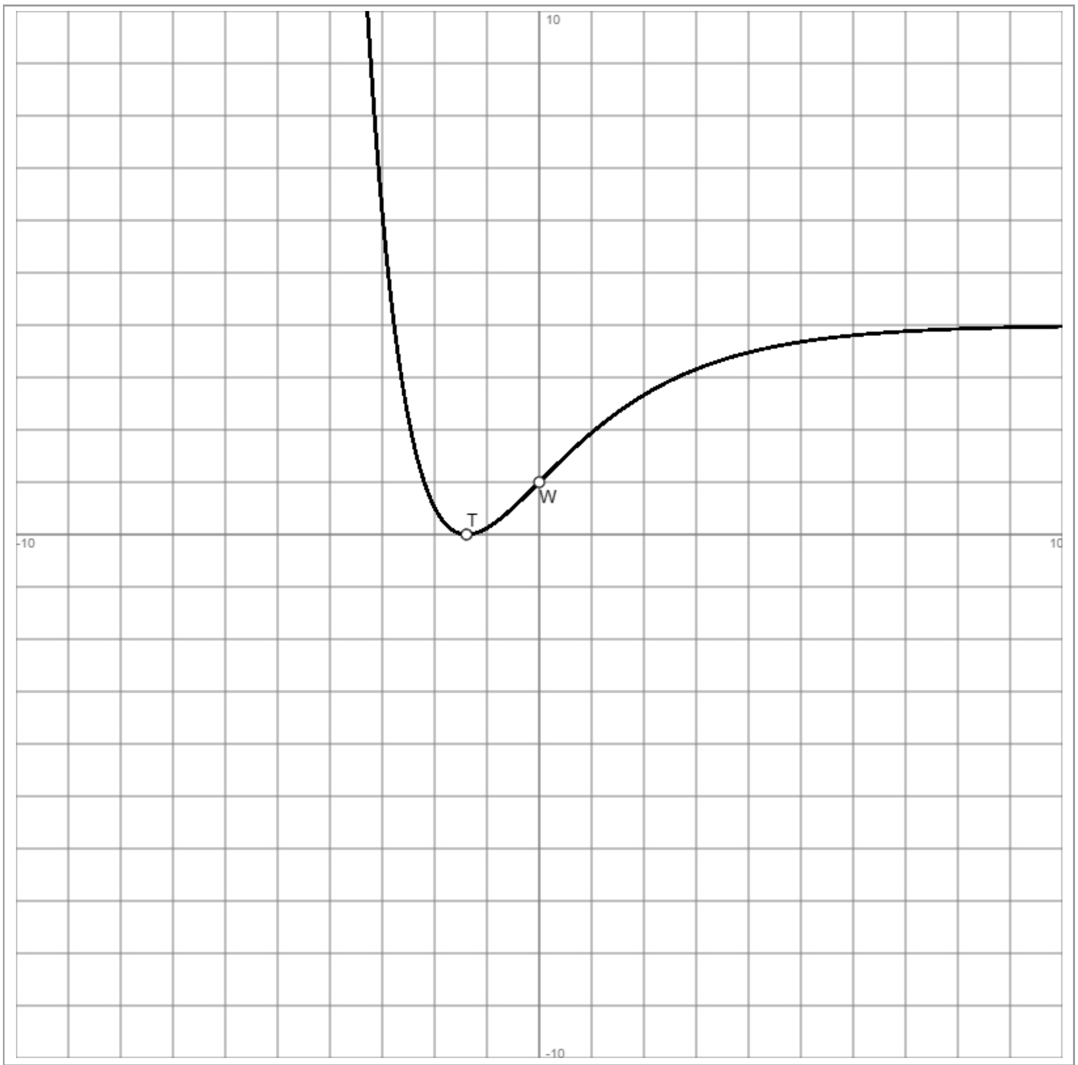
III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-10	21436.8132	-21730.01	21878.24	
-9.5	12901.3897	-13128.78	13244.25	
-9	7747.0154	-7923.18	8013.13	
-8.5	4638.3472	-4774.64	4844.7	
-8	2766.5654	-2871.81	2926.38	
-7.5	1641.9581	-1723.03	1765.54	
-7	968.1714	-1030.42	1063.53	
-6.5	565.9803	-613.57	639.36	
-6	327.0866	-363.26	383.35	
-5.5	186.1214	-213.41	229.05	
-5	103.6832	-124.05	136.23	
-4.5	56.0662	-71.04	80.53	
-4	29.0419	-39.82	47.21	
-3.5	14.097	-21.61	27.36	
-3	6.1588	-11.12	15.6	
-2.5	2.2211	-5.2	8.69	
-2	0.5159	-1.95	4.67	
-1.5	0.0137	-0.25	2.36	
-1.39	0	-0.01	2.01	Tiefpunkt T(-1.39|0)
-1	0.1234	0.58	1.07	
-0.5	0.5126	0.92	0.36	
0	1	1	0	Schnittpunkt S_y(0|1) = Wendepunkt W(0|1)
0.5	1.4913	0.95	-0.17	
1	1.9418	0.85	-0.24	
1.5	2.3337	0.72	-0.25	
2	2.6638	0.6	-0.23	
2.5	2.9361	0.49	-0.2	
3	3.1573	0.4	-0.17	
3.5	3.3351	0.32	-0.14	
4	3.477	0.25	-0.12	
4.5	3.5895	0.2	-0.09	
5	3.6784	0.16	-0.08	
5.5	3.7484	0.12	-0.06	
6	3.8033	0.1	-0.05	
6.5	3.8464	0.08	-0.04	
7	3.8801	0.06	-0.03	

7.5	3.9065	0.05	-0.02	
8	3.9271	0.04	-0.02	
8.5	3.9431	0.03	-0.01	
9	3.9557	0.02	-0.01	
9.5	3.9655	0.02	-0.01	
10	3.9731	0.01	-0.01	

Graph: Funktion f(x)



www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Aufgabe 1793