Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion, Tangente, Integral

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^x - 4e^{0,5x} + 3$.

a) Berechne den Tiefpunkt der Funktion f(x).

b) Bestimme den Wendepunkt der Funktion f(x) und die Wendetangente. Wo schneidet die Tangente die Asymptote der Funktion f(x)?

c) Zeichne den Graphen der Funktion f(x) in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem sowie die Asymptote und die Wendetangente von f(x).

d) Die Funktion f(x) begrenzt zusammen mit der x-Achse des Koordinatensystems im 4. Quadranten eine Fläche. Berechne den Flächeninhalt, markiere die Fläche im Koordinatensystem.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] usw.)
I. Ableitungen: f'(x), f''(x), f'''(x)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
V. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs: f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil, y = e^x, D_y = **R**: x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞ x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0) x->-∞: f(x) = (a_nx^n+…)e^{bx} -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = (a_nx^n+…)e^{bx} -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0) mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen

II. Allgemein gilt die Formel der Tangentengleichung:

$$t: y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

mit Funktion f(x), Ableitungsfunktion f'(x) und t als Tangente an die Funktion f(x) an der Stelle x_0. Die Tangente in einem Wendepunkt der Funktion f(x) heißt Wendetangente.

III. Inhalte von Flächen zwischen Funktion und x-Achse werden als Integral berechnet:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

d.h. es gilt die folgende Vorgehensweise: Ermitteln der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals u.a. als Nullstellen der Funktion f(x), Stammfunktion F(x) bestimmen, Einsetzen der oberen und unteren Grenze des bestimmten Integrals in die Stammfunktion, Ausrechnen der Differenz zwischen Stammfunktionswert der oberen und Stammfunktionswert der unteren Grenze.

IV. Die Funktion $f(x) = e^x - 4e^{0,5x} + 3$ ist eine natürliche Exponentialfunktion:

a) Um den Tiefpunkt der Funktion nachzuweisen, bilden wir die ersten beiden Ableitungen nach der Exponential-, Faktor- und Summenregel gebildet: Funktion f(x) ->

1. Ableitung: $f'(x) = e^x - 2e^{0,5x}$

2. Ableitung: $f''(x) = e^x - e^{0,5x}$.

Nullsetzen der 1. Ableitung ergibt:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x – 2e^{0,5x} = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} – 2 = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 2 \Leftrightarrow 0,5x = \ln(2) \Leftrightarrow x = 2\cdot\ln(2)$.

An der Stelle $x = 2\cdot\ln(2)$ liegt dann wegen $f''(2\cdot\ln(2)) = e^{2\cdot\ln(2)} – e^{0,5\cdot 2\cdot\ln(2)} = 4 – 2 = 2 > 0$ ein Tiefpunkt vor mit: $f(2\cdot\ln(2)) = e^{2\cdot\ln(2)} – 4\cdot e^{0,5\cdot 2\cdot\ln(2)} + 3 = 4 – 4\cdot 2 + 3 = -1$ vor, also: $T(2\cdot\ln(2)|-1)$.

b) Für den Wendepunkt der Funktion benötigen wir die 2. und 3. Ableitung: Funktion f(x) ->

2. Ableitung: $f''(x) = e^x - e^{0,5x}$

3. Ableitung: $f'''(x) = e^x - 0,5e^{0,5x}$.

Nullsetzen der 2. Ableitung führt auf:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x – e^{0,5x} = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} – 1 = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 1 \Leftrightarrow 0,5x = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

An der Stelle x = 0 liegt wegen $f'''(0) = e^0 – 0,5\cdot e^0 = 1 – 0,5 = 0,5 \neq 0$ ein Wendepunkt vor mit: $f(0) = e^0 – 4\cdot e^0 + 3 = 1 – 4 + 3 = 0$ vor, also: W(0|0). Der Wendepunkt ist als Koordinatenursprung auch gleichzeitig eine Nullstelle der Funktion f(x).

Die Wendetangente errechnet sich mit f(0) = 0 und $f'(0) = e^0 – 2e^0 = 1 – 2 = -1$ als:

t: $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -1\cdot x + 0 = -x$.

Die Asymptote der Funktion f(x) bestimmt sich mit:

$x \to -\infty$: $f(x) \to 3 = y$ als waagerechte Asymptote.

Wendetangente y = -x und Asymptote y = 3 schneiden sich dann im Schnittpunkt:

$y = y \Leftrightarrow -x = 3 \Leftrightarrow x = -3$ -> y = 3 -> Schnittpunkt S(-3|3).

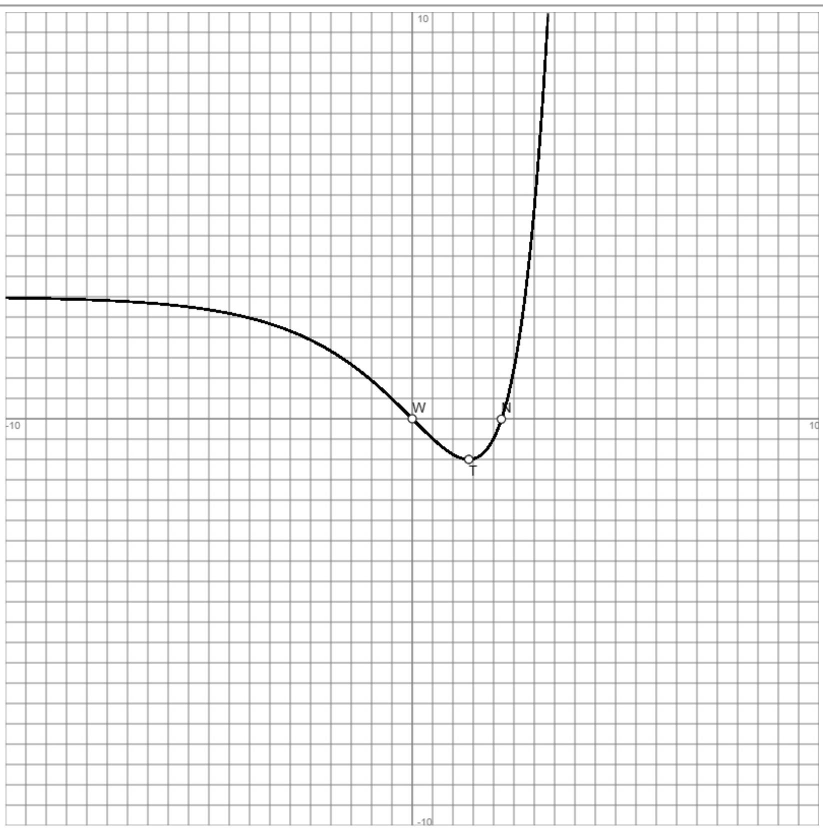
c) Es ergibt sich das Aussehen der Funktion f(x) gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:

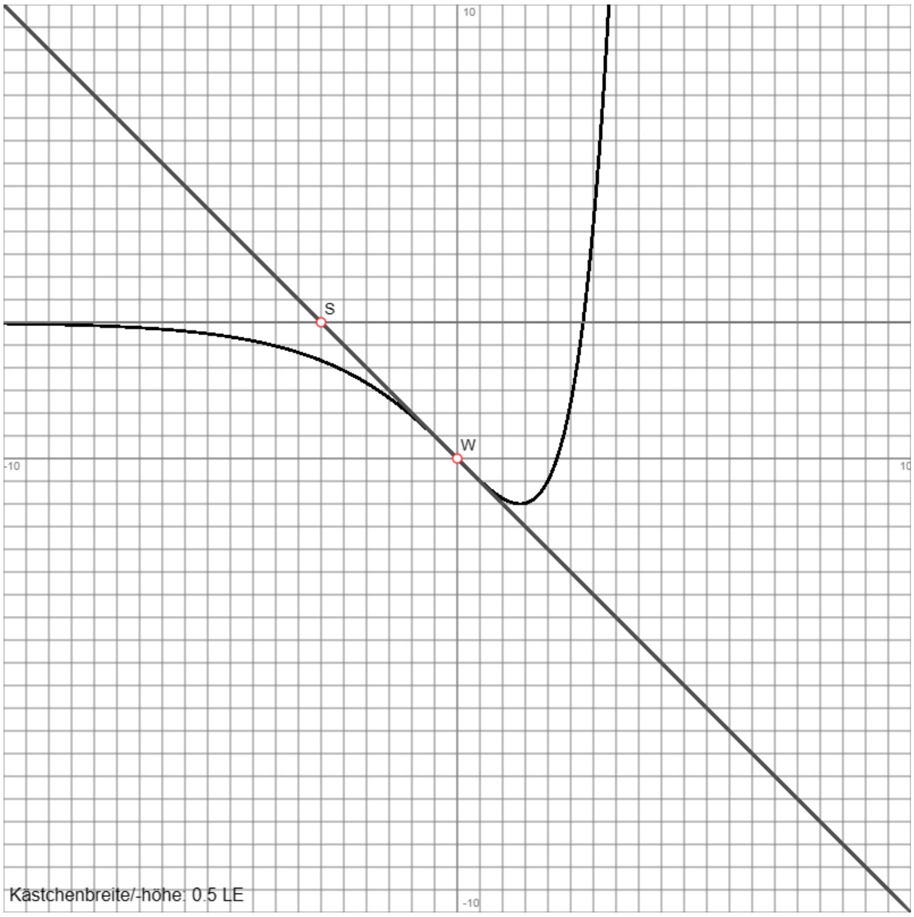
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-10	2.9731	-0.01	-0.01	
-9.5	2.9655	-0.02	-0.01	
-9	2.9557	-0.02	-0.01	
-8.5	2.9431	-0.03	-0.01	
-8	2.9271	-0.04	-0.02	
-7.5	2.9065	-0.05	-0.02	
-7	2.8801	-0.06	-0.03	
-6.5	2.8464	-0.08	-0.04	
-6	2.8033	-0.1	-0.05	
-5.5	2.7484	-0.12	-0.06	
-5	2.6784	-0.16	-0.08	
-4.5	2.5895	-0.2	-0.09	
-4	2.477	-0.25	-0.12	
-3.5	2.3351	-0.32	-0.14	
-3	2.1573	-0.4	-0.17	
-2.5	1.9361	-0.49	-0.2	
-2	1.6638	-0.6	-0.23	
-1.5	1.3337	-0.72	-0.25	

-1	0.9418	-0.85	-0.24	
-0.5	0.4913	-0.95	-0.17	
0	0	-1	0	Schnittpunkt $S_y(0\|0)$ = Wendepunkt W(0|0)
0.5	-0.4874	-0.92	0.36	
1	-0.8766	-0.58	1.07	
1.385	-1	0	2	Tiefpunkt T(1.39|-1)
1.5	-0.9863	0.25	2.36	
2	-0.4841	1.95	4.67	
2.195	0	2.99	5.98	Nullstelle N(2.19|0)
2.5	1.2211	5.2	8.69	
3	5.1588	11.12	15.6	
3.5	13.097	21.61	27.36	
4	28.0419	39.82	47.21	
4.5	55.0662	71.04	80.53	
5	102.6832	124.05	136.23	
5.5	185.1214	213.41	229.05	
6	326.0866	363.26	383.34	
6.5	564.9803	613.56	639.35	
7	967.1714	1030.41	1063.52	
7.5	1640.9581	1723.01	1765.53	
8	2765.5654	2871.77	2926.37	
8.5	4637.3472	4774.58	4844.67	
9	7746.0154	7923.08	8013.08	
9.5	12900.3897	13128.61	13244.17	
10	21435.8132	21729.73	21878.1	

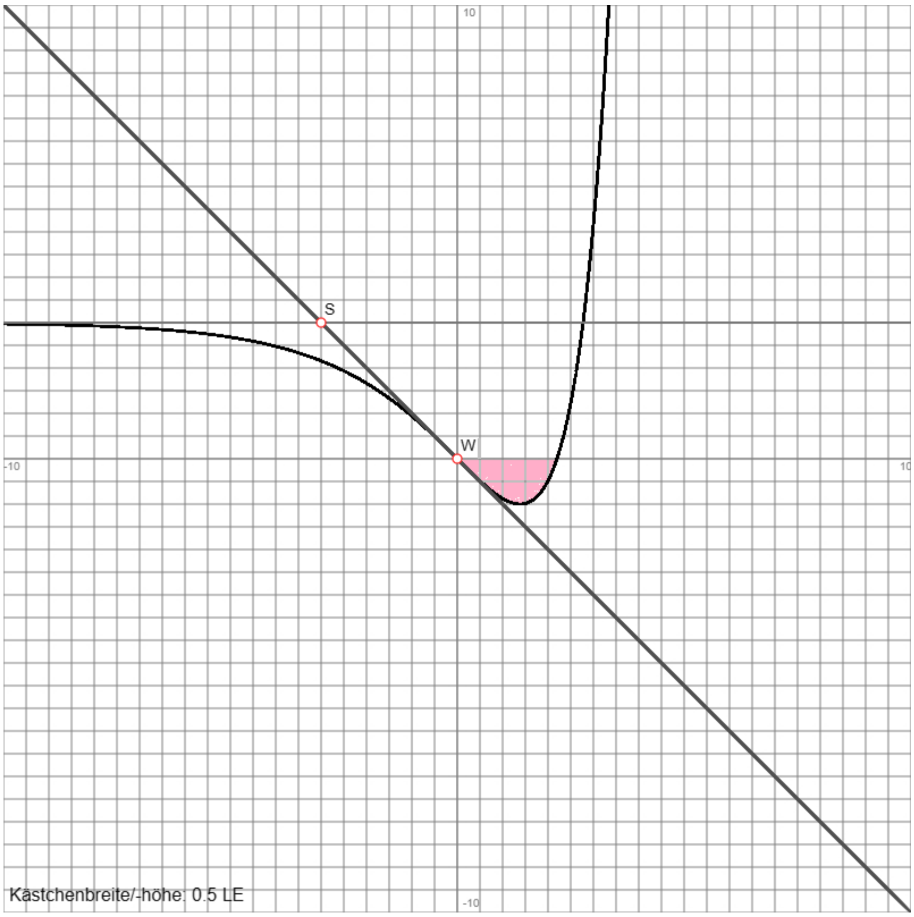
Graph: Funktion f(x)



Unter Einbeziehung von waagerechter Asymptote y = 3 und Wendetangente y = -x ergibt sich:



d) Wir markieren die zu berechnende Fläche im x-y-Koordinatensystem:



Zur Bestimmung des Flächeninhalts benötigen wir die Nullstellen der Funktion f(x):

f(x) = 0 ⇔ $e^x - 4e^{0,5x} + 3 = 0 \underset{z=e^{0,5x}}{\Leftrightarrow} z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$ ⇔ z = 1, z = 3

$\underset{e^{0,5x}=z}{\Leftrightarrow}$ $e^{0,5x}$ = 1, $e^{0,5x}$ = 3 ⇔ 0,5x = ln(1) = 0, 0,5x = ln(3) ⇔ x = 0, x = 2·ln(3).

Die Nullstellen der Funktion f(x) sind: N(0|0) (als Wendepunkt, s.o.), N(2·ln(3)|0).
Wir bestimmen als Nächstes die Stammfunktion zu f(x) vermöge der umgekehrten Kettenregel, der Faktor-, Potenz- und Summenregel: Funktion f(x) ->

$$F(x) = e^x - \frac{4}{0,5}e^{0,5x} + 3x = e^x - 8e^{0,5x} + 3x.$$

Nun berechnen wir über x = 0 und x = 2·ln(3) als untere und obere Grenze das Integral:

$$\int_0^{2\ln 3} (e^x - 4e^{0,5x} + 3)dx = \left[e^x - 8e^{0,5x} + 3x\right]_0^{2\ln 3} = \left(e^{2\ln 3} - 4e^{0,5\cdot 2\ln 3} + 3 \cdot 2\ln 3\right) - \left(e^0 - 4e^{0,5\cdot 0} + 3 \cdot 0\right) =$$

$$\left(9 - 4 \cdot 3 + 6\ln 3\right) - \left(1 - 4 + 0\right) = \left(-12 + 6\ln 3\right) - (-3) = 6\ln 3 - 9.$$

Es ist 6·ln(3)–9 negativ, so dass der gesuchte Flächeninhalt
A = 9 – 6·ln(3) ≈ 2,408 FE
beträgt.

(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2023 / Aufgabe 1822