Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = x(4-x)^3.$$

Bestimme die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte der Funktion und skizziere diese.

Lösung: I. Für eine ganz rationale Funktion (Polynomfunktion) n. Grades gelten allgemein folgende

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$ $f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + ... + 6a_3$
II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

II. Wir berechnen für die auf alle reellen Zahlen definierte Funktion f(x) die <u>Ableitungen</u> (nach Produkt-, Ketten-, Potenz-, Summen- und Faktorregel) als:

$f(x) = x(4-x)^3$ (Funktion)

$f'(x) = 1\cdot(4-x)^3 + x\cdot 3(4-x)^2\cdot(-1) = (4-x)^3 - 3x(4-x)^2 = [(4-x)-3x](4-x)^2 = (4-4x)(4-x)^2$ (1. Ableitung)

$f''(x) = -4(4-x)^2 + (4-4x)\cdot 2(4-x)\cdot(-1) = -4(4-x)^2 - 2(4-4x)(4-x) = [-4(4-x)-2(4-4x)](4-x) = (-16+4x-8+8x))(4-x) = (-24+12x)(4-x)$ (2. Ableitung)

$f'''(x) = 12\cdot(4-x) + (-24+12x)\cdot(-1) = 48-12x+24-12x = 72-24x$ (3. Ableitung).

III. <u>Nullstellen</u>: Nullsetzen der Funktionsgleichung ergibt nach dem Satz vom Nullprodukt:

$f(x) = x(4-x)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0, (4-x)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4-x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 4$

Nullstellen der Funktion sind somit: x = 0, x = 4. Also: $N_1(0|0)$, $N_2(4|0)$.

IV. <u>Hoch- und Tiefpunkte</u>: *Notwendige Bedingung*: Das Nullsetzen der 1. Ableitung führt nach dem Satz vom Nullprodukt auf:

$f'(x) = (4-4x)(4-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 4-4x = 0, (4-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 4 = 4x, 4-x = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 4.$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der gefundenen x-Werte in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(1) = (-24+12)(4-1) = -36 < 0$ => x = 1 als Hochpunkt

$f''(0) = -24\cdot 0$, wodurch an der Stelle x = 0 eine Identifizierung als Extrempunkt nicht möglich ist.

x = 1 ist also ein relatives Maximum der Funktion. Der diesbezügliche Kurvenpunkt lautet wegen $f(1) = 1\cdot(4-1)^3 = 3^3 = 27$: H(1|27).

V. Wendepunkte: *Notwendige Bedingung*: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt mit dem Satz vom Nullprodukt:

$f''(x) = (-24+12x)(4-x) = 0 \Leftrightarrow -24+12x = 0,\ 4-x = 0 \Leftrightarrow 12x = 24,\ x = 4 \Leftrightarrow x = 2,\ x = 4.$

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der x-Koordinaten der potenziellen Wendepunkte in die 3. Ableitung führt auf:

$f'''(2) = 72-48 = 24 \neq 0 \Rightarrow x = 2$ als Wendepunkt
$f'''(4) = 72-96 = -24 \neq 0 \Rightarrow x = 4$ als Wendepunkt.

Wegen $f'(4) = 0$ (siehe III.) liegt an der Stelle $x = 0$ ein besonderer Wendepunkt, ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, ein Sattelpunkt vor. Es gilt auf Grund von $f(4) = 4\cdot(4-4)^3 = 0$: $W_2(4|0) = S(4|0)$ als Sattelpunkt. Wegen $f(2) = 2\cdot(4-2)^3 = 2\cdot2^3 = 16$ lautet der weitere Wendepunkt: $W_2(2|16)$.

VI. Wertetabelle, Graph: Für $f(x) = x(4-x)^3$ ergibt sich:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	-3645	1944	-756	
-4	-2048	1280	-576	
-3	-1029	784	-420	
-2	-432	432	-288	
-1	-125	200	-180	
-0.5	-45.5625	121.5	-135	
0	0	64	-96	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.5	21.4375	24.5	-63	
1	27	0	-36	Hochpunkt H(1|27)
1.5	23.4375	-12.5	-15	
2	16	-16	0	Wendepunkt W(2|16)
2.5	8.4375	-13.5	9	
3	3	-8	12	
3.5	0.4375	-2.5	9	
4	0	0	0	Nullstelle N(4|0) = Wendepunkt W(4|0)
4.5	-0.5625	-3.5	-15	
5	-5	-16	-36	

Graph: