Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurven (Parameterdarstellung)

Aufgabe: Gegeben sei für reelle tε[-5; 5] die Kurve K in der Parameterdarstellung:

$$x(t) = t^2 - 4$$
$$y(t) = t^2 - 2t + 1$$

im x-y-Koordinatensystem.

a) Skizziere die Kurve K im Koordinatensystem (Wertetabelle, Graph).
b) Wo schneidet die Kurve K die y-Achse des Koordinatensystems? Zeige zudem, dass die Kurve die x-Achse berührt.
c) Berechne in den y-Achsenabschnittspunkten jeweils die Ableitung. Wo hat die Kurve horizontale bzw. vertikale Tangenten?
d) Berechne die Tangente im Kurvenpunkt mit Parameter t_0 = -1.
e) Die Kurve K ist eine Parabel. Wie verhalten sich die Ableitungen der Kurve für betragsmäßig große Parameter t? Bestimme Scheitelpunkt und Symmetrieachse der Parabel.
f) Berechne die Fläche zwischen dem unteren Kurventeil K, x-, y-Achse und Gerade x = 5 im 1. Quadranten des Koordinatensystems.

1. Lösung: a) I. Allgemein gilt für Kurven K in Parameterdarstellung x(t), y(t) im x-y-Koordinatensystem:

1) Für jeden Parameter t (aus dem Definitionsbereich der Kurve) ergibt sich der Kurvenpunkt P(x(t)|y(t)), die Menge aller Kurvenpunkte ist die Kurve K.

2) Die Ableitungen der Parameterkoordinaten x(t), y(t) nach dem Parameter t sind: $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, die 1. Ableitung der Kurve K: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, die 2. Ableitung: $y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$.

3) Für einen Parameter t_0 der Kurve K mit Kurvenpunkt $P(x(t_0)|y(t_0)) = P(x_0|y_0)$ und Ableitung y_0' ergibt sich die Tangentengleichung: t: $y = y_0'(x–x_0) + y_0$.

4) Bei waagrechten Tangenten an der Kurve K gilt: $\dot{y}(t) = 0$ bei $\dot{x}(t) \neq 0$, bei senkrechten Tangenten: $\dot{x}(t) = 0$ bei $\dot{y}(t) \neq 0$.

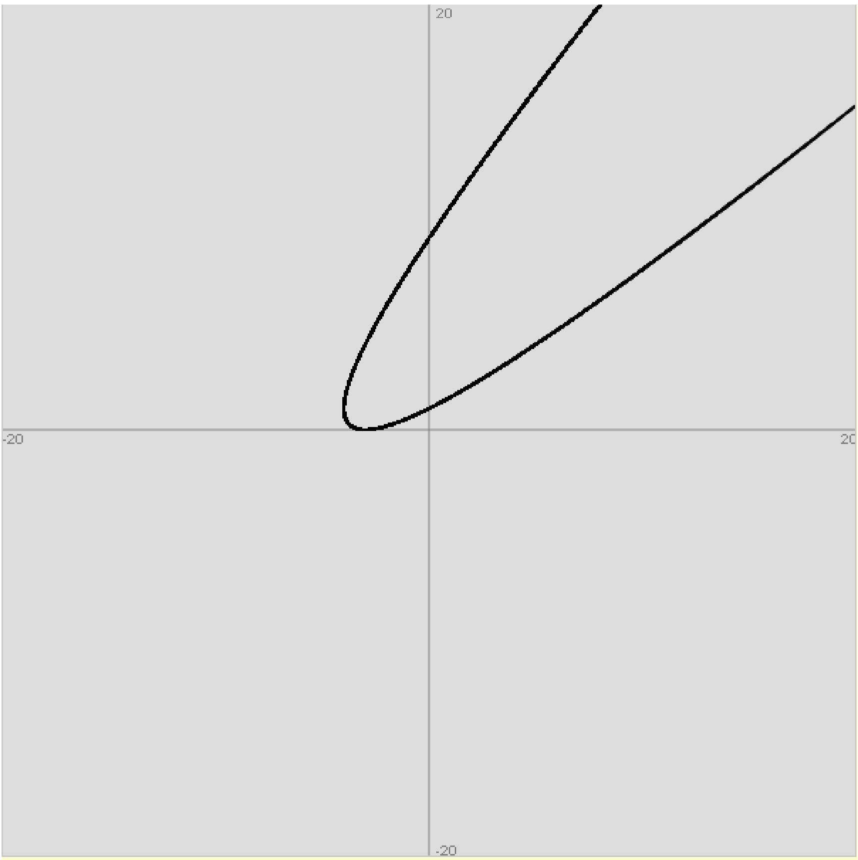
5) Flächen zwischen Kurve K und den Achsen des Koordinatensystems auf dem t-Intervall $[t_1; t_2]$ lassen sich berechnen als: $A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)y(t)dt$ (Fläche zwischen Kurve und x-Achse), weiter als:

$A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}(t)x(t)dt$ (Fläche zwischen Kurve und y-Achse).

II. Für die Kurve K in der Parameterdarstellung: $x(t) = t^2 - 4$, $y(t) = t^2 - 2t + 1$ ergeben sich Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:

t	x(t)	y(t)
-5	21	36
-4.5	16.25	30.25
-4	12	25
-3.5	8.25	20.25
-3	5	16
-2.5	2.25	12.25
-2	0	9
-1.5	-1.75	6.25
-1	-3	4
-0.5	-3.75	2.25
0	-4	1
0.5	-3.75	0.25
1	-3	0
1.5	-1.75	0.25
2	0	1
2.5	2.25	2.25
3	5	4
3.5	8.25	6.25
4	12	9
4.5	16.25	12.25
5	21	16



Kurve: x(t) = t^2-4
y(t) = t^2-2*t+1

Die Kurve stellt dann eine verschobene und gedrehte Normalparabel dar.

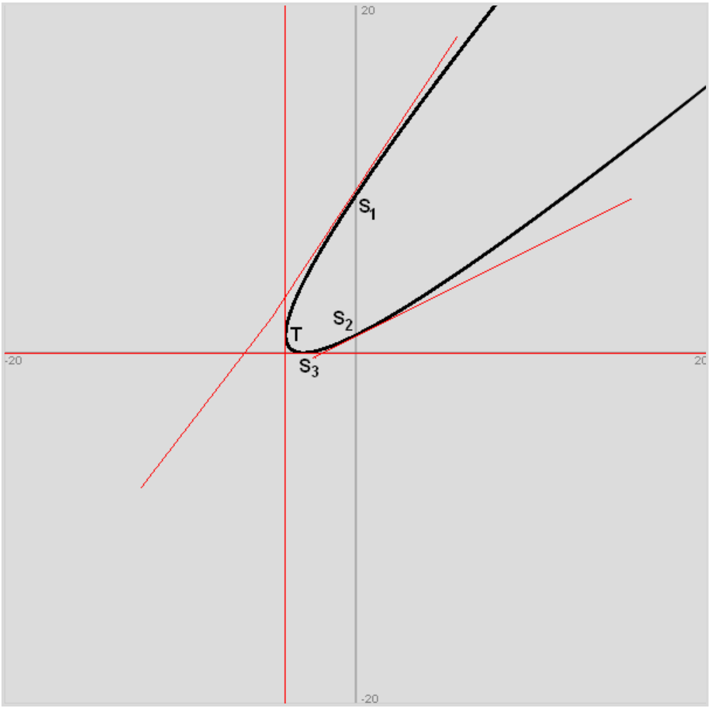
b) Die Kurvenschnittpunkte mit der y-Achse ergeben sich aus der Bedingung: x(t) = 0, also:

$t^2 – 4 = 0$ | +4
$t^2 = 4$ | √
$t = \pm 2$,

woraus aus x(-2) = x(2) = 0 und y(-2) = 9, y(2) = 1 (siehe Wertetabelle) als Schnittpunkte $S_1(0|9)$, $S_2(0|1)$ folgen. Den (einzigen) Kurvenschnittpunkt auf der x-Achse erhalten wir aus: y(t) = 0 und damit aus:

$t^2–2t+1 = 0$ (2. binomische Formel)
$(t-1)^2 = 0$ | √
$t-1 = 0$ | +1
$t = 1$.

Wegen $(t-1)^2 = 0$ liegt eine doppelte Nullstelle und damit ein Berührpunkt der Kurve K an der x-Achse vor. Wegen y(1) = 0 und x(1) = -3 (siehe Wertetabelle) lauten die Koordinaten dieses Punktes: $S_3(-3|0)$.



c) I. Wir bilden zunächst die Ableitungen der Koordinaten der Kurve K nach dem Parameter t und erhalten:

$\dot{x}(t) = 2t$

$\dot{y}(t) = 2t - 2$.

II. Die Ableitung der Kurve lässt sich bilden aus:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t-2}{2t},$$

woraus sich an den Stellen $S_1(0|9)$, $S_2(0|1)$ (als Schnittpunkte mit der y-Achse) wegen t=-2 bzw. t=2 die Kurvensteigungen:

t=-2, $S_1(0|9)$ => $y' = \frac{2\cdot(-2)-2}{2\cdot(-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$ =1,5

t=2, $S_2(0|1)$ => $y' = \frac{2\cdot 2-2}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ =0,5

ergeben.

III. Waagerechte Tangenten der Kurve K liegen vor bei: $\dot{y}(t) = 0$, also:

$2t-2 = 0$ | +2
$2t = 2$ | :2
$t = 1$,

woraus nochmals der Berührpunkt $S_3(-3|0)$ folgt.

IV. Senkrechte Tangenten der Kurve K liegen vor bei: $\dot{x}(t) = 0$, also:

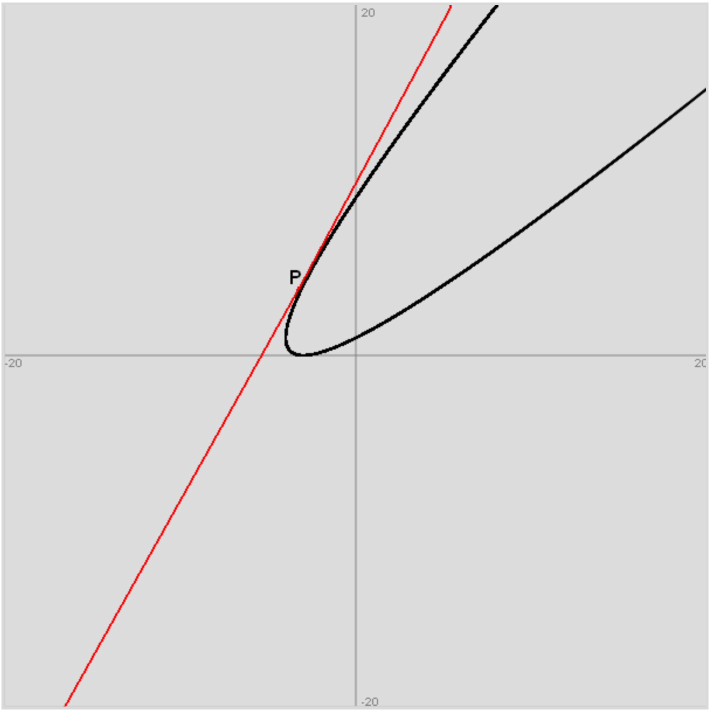
$2t = 0$ | :2
$t = 0$,

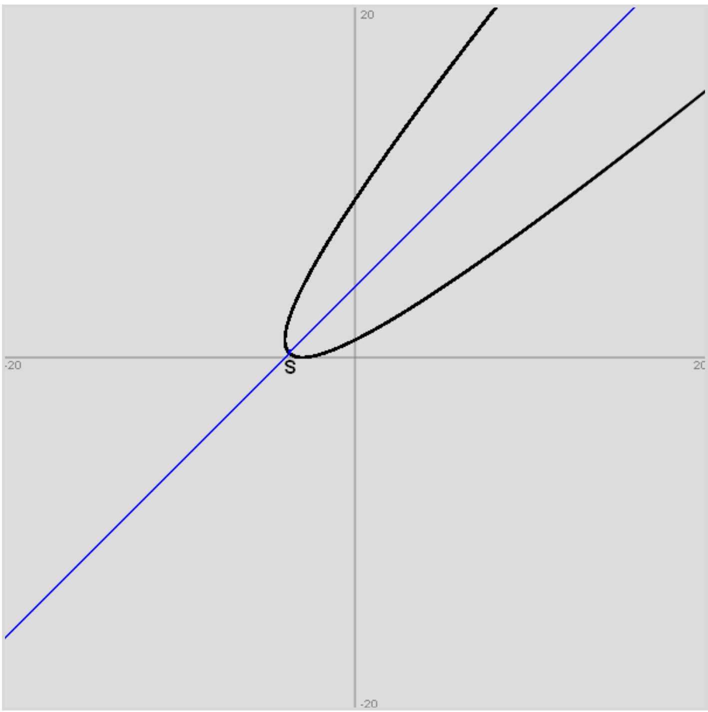
woraus sich mit x(0) = -4 und y(0) = 1 (siehe Wertetabelle) der Kurvenpunkt T(-4|1) ergibt.

d) Für t_0=-1 erhalten wir als Kurvenpunkt P(-3|4) (siehe Wertetabelle) sowie die Ableitung:

$$y_0' = \frac{2\cdot(-1)-2}{2\cdot(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2,$$

woraus für die gesuchte Tangentengleichung im Punkt P(-3|4) folgt:
t: y = y_0'(x–x_0) + y_0 = 2(x–(-3)) + 4 = 2(x+3) + 4 = 2x + 6 + 4 = 2x + 10.





e) Wegen $y' = \frac{2t-2}{2t}$ gilt für t-> ±∞, also für betragsmäßig große Parameter t: $y' \to \frac{2}{2} = 1$ = m. m ist dabei die Steigung der Symmetrieachse der Parabel y = mx + c = 1x + c = x + c (*). Der Scheitelpunkt S der Parabel K ergibt sich aus dem Mittelwert der Parameter betreffend die Punkte S_3 und T mit waagerechter und senkrechter Tangente (t=1, t=0) als t = 0,5 und damit als:

S(-3,75|0,25) (siehe Wertetabelle). Da der Scheitel auf der Symmetrieachse liegt, erhalten wir nach Durchführung der Punktprobe mit x=-3,75 und y=0,25 aus der Geradengleichung (*):

0,25 = -3,75 + c => 4 = c,

womit für die Symmetrieachse y = x +4 folgt.

f) Zur Flächenberechnung zwischen dem unteren Kurventeil K und den Geraden y = 0, x = 0 und x = 5 sind zunächst die das Flächenintegral begrenzenden Parameter t_1, t_2 zu ermitteln. Aus x(t) = x = 0 folgt – siehe oben –:

$t^2-4 = 0$	$\mid +4$
$t^2 = 4$	$\mid \sqrt{}$
$t = \pm 2$,	

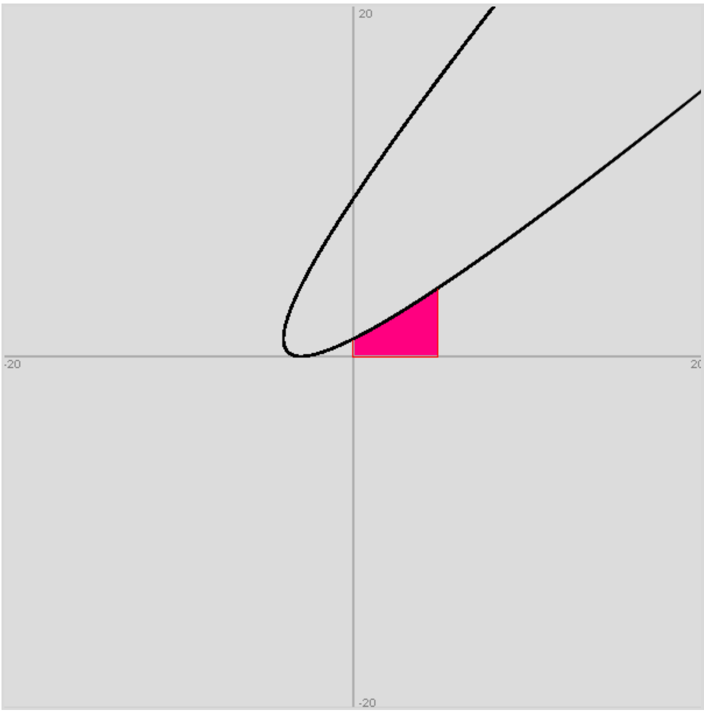
also: $t_1 = 2$. Aus x(t) = x = 5 ergibt sich:

$t^2-4 = 5$	$\mid +4$
$t^2 = 9$	$\mid \sqrt{}$
$t = \pm 3$,	

also: $t_2 = 3$ (siehe auch Wertetabelle). Der Flächeninhalt im 1. Quadranten des Koordinatensystems bestimmt sich auf Grund von $y(t) = t^2 - 2t + 1$ und $\dot{x}(t) = 2t$ als:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t) y(t) dt = \int_2^3 2t(t^2 - 2t + 1) dt = \int_2^3 (2t^3 - 4t^2 + 2t) dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{4t^3}{3} + t^2 \right]_2^3 =$$

$$\left(\frac{3^4}{2} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} + 3^2 \right) - \left(\frac{2^4}{2} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} + 2^2 \right) = (40{,}5 - 36 + 9) - (8 - \frac{32}{3} + 4) = 13{,}5 - \frac{4}{3} = 12\frac{1}{6}$$



2. Lösung: a) Die Kurve K in der Parameterdarstellung: $x(t) = t^2 - 4$, $y(t) = t^2 - 2t + 1$ lässt sich explizit als reelle „Funktion“ f(x) mit zwei Funktionsästen schreiben vermöge der Umformung:

$x(t) = x = t^2-4$	$\mid +4$
$x+4 = t^2$	$\mid \sqrt{}$
$t = \pm\sqrt{x+4}$.	

Einsetzen des Terms $t = \pm\sqrt{x+4}$ in y(t) ergibt:

$$f(x) = y = (\pm\sqrt{x+4})^2 - 2 \cdot (\pm\sqrt{x+4}) + 1 = x + 4 \mp 2\sqrt{x+4} + 1 = x + 5 \mp 2\sqrt{x+4}.$$

Die Äste der <u>Wurzel-Parabel-Funktion</u> f(x) sind damit:

$f(x) = x + 5 + 2\sqrt{x+4}$

$f(x) = x + 5 - 2\sqrt{x+4}$,

Definitionsbereich der Funktionsäste ist $D_f = [-4; \infty)$.

b) Als <u>Schnittpunkte</u> der Funktion f(x) mit der y-Achse erhalten wir:

f(0) = 0+5+2·2 = 9
f(0) = 0+5–2·2 = 1,

also: $S_1(0|9)$, $S_2(0|1)$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse führt für den unteren Funktionsast auf die Gleichung:

f(x) = 0

$x + 5 - 2\sqrt{x+4} = 0$	$\mid +2\sqrt{x+4}$
$x + 5 = 2\sqrt{x+4}$	$\mid ()^2$
$(x+5)^2 = 4(x+4)$	(Klammern auflösen)
$x^2+10x+25 = 4x+16$	$\mid -4x, -16$
$x^2 +6x +9 = 0$	(1. binomische Formel)
$(x+3)^2 = 0$	$\mid \sqrt{}$
$x+3 = 0$	$\mid -3$
$x = -3$	

mit Schnittpunkt (als Berührpunkt) $S_3(-3|0)$.

c) Als <u>Ableitungen</u> der Funktionsäste haben wir:

$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

und damit in den y-Achsenabschnittspunkten $S_1(0|9)$, $S_2(0|1)$ die Steigungen:

$f'(0) = 1 + \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{3}{2}$ =1,5

$f'(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{0+4}} = \frac{1}{2}$ =0,5.

Eine waagerechte Tangente ist im Punkt $S_3(-3|0)$ vorhanden mit: y = 0, eine senkrechte Tangente findet sich an der Stelle x = -4 und als Gerade x = -4.

d) Gemäß der Tangentenformel t: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ haben wir im Funktionspunkt P(-3|4) des Funktionsasts $f(x) = x + 5 + 2\sqrt{x+4}$ die Ableitung $f'(-3) = 1 + \frac{1}{\sqrt{-3+4}} = 2$ und somit die <u>Tangentengleichung</u>:

t: y = 2(x+3) + 4 = 2x + 10.

e) Für x->±∞, also für <u>betragsmäßig große x</u> gilt: $f'(x) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{x+4}} \to 1 \pm 0 = 1$. Die <u>Symmetrieachse</u> der Funktion ist: y = x + 4.

f) Wir berechnen hinsichtlich der Fläche zwischen unterem Funktionsast $f(x) = x + 5 - 2\sqrt{x+4}$, x-Achse und senkrechten Geraden x = 0 und x = 5 das Integral:

$$A = \int_0^5 \left(x + 5 - 2\sqrt{x+4}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5 = \left(\frac{25}{2} + 25 - \frac{4}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}}\right) - \left(0 + 0 - \frac{4}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$(37{,}5-36)-(-\frac{32}{3})=1{,}5+\frac{32}{3}=12\frac{1}{6}$$

als Flächeninhalt der gesuchten Fläche im 1. Quadranten des Koordinatensystems.

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 291