Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurven (Polarkoordinaten)

Aufgabe: Gegeben sei für reelle Winkel φ die Kurve K als Kardioide (Herzkurve) in Polarkoordinaten:

$$r(\varphi) = 2 \cdot (1 + \cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

im x-y-Koordinatensystem.

a) Skizziere die Kurve K im Koordinatensystem (Wertetabelle, Graph).
b) Wo schneidet die Kurve K die y-Achse des Koordinatensystems?
c) Wo hat die Kurve K horizontale bzw. vertikale Tangenten?
d) Berechne die Tangente im Kurvenpunkt mit dem Winkel φ = 3π/4.
e) Berechne den Inhalt der Fläche, die die Kardioide einschließt.
f) Berechne die Bogenlänge der gesamten Kurve K.

Lösung: a) I. Allgemein gilt für Kurven K in Parameterdarstellung im x-y-Koordinatensystem:

1) Für jeden Parameter t (aus dem Definitionsbereich der Kurve) ergibt sich der Kurvenpunkt P(x(t)|y(t)), die Menge aller Kurvenpunkte ist die Kurve K.

2) Die Ableitungen der Parameterkoordinaten x(t), y(t) nach dem Parameter t sind: $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, die 1. Ableitung der Kurve K: $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, die 2. Ableitung: $y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$.

3) Für einen Parameter t_0 der Kurve K mit Kurvenpunkt $P(x(t_0)|y(t_0)) = P(x_0|y_0)$ und Ableitung y_0' ergibt sich die Tangentengleichung: t: $y = y_0'(x-x_0) + y_0$.

4) Bei waagrechten Tangenten an der Kurve K gilt: $\dot{y}(t) = 0$ bei $\dot{x}(t) \neq 0$, bei senkrechten Tangenten: $\dot{x}(t) = 0$ bei $\dot{y}(t) \neq 0$.

5) Flächen zwischen Kurve K und den Achsen des Koordinatensystems auf dem t-Intervall $[t_1; t_2]$ lassen sich berechnen als: $A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)y(t)dt$ (Fläche zwischen Kurve und x-Achse), weiter als: $A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}(t)x(t)dt$ (Fläche zwischen Kurve und y-Achse).

6) Die Bogenlänge einer Kurve K auf dem t-Intervall $[t_1; t_2]$ lässt sich berechnen als: $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,dt$.

II. Allgemein gilt für Kurven K in Polarkoordinaten im x-y-Koordinatensystem:

1) Für jeden Winkel φ (aus dem Definitionsbereich der Kurve) ergibt sich der Kurvenpunkt P(r(φ)cos(φ)|r(φ)sin(φ)), die Menge aller Kurvenpunkte ist die Kurve K.

2) Wegen x(φ) = r(φ)cos(φ) und y(φ) = r(φ)sin(φ) gilt für die Ableitung der Kurve K:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{\dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}$$

mit $\dot{x}(\varphi) = \dot{r}(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$, $\dot{y}(\varphi) = \dot{r}(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$ als Ableitungen der Koordinaten nach dem Winkel.

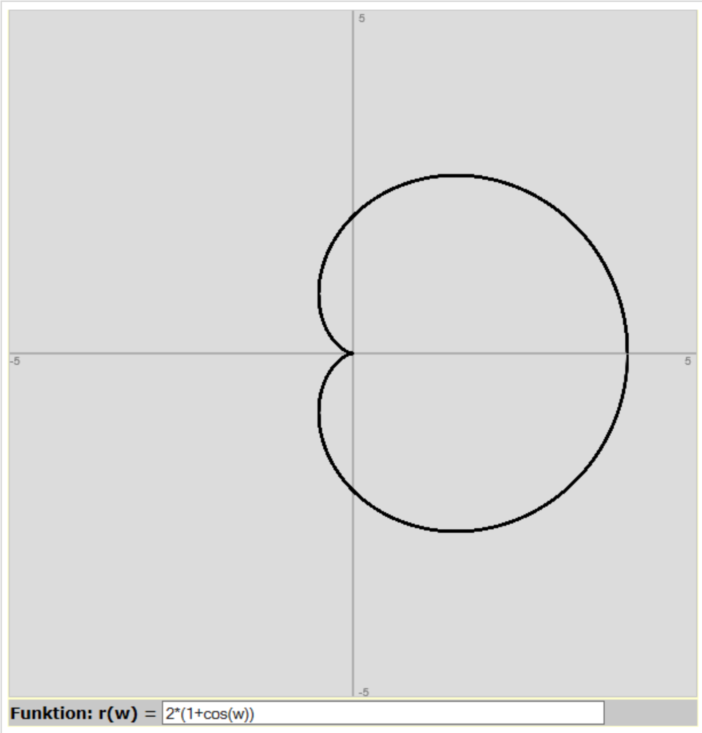
3) Für die <u>Flächenberechnung</u> gilt die Sektorenformel: $A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 \, d\varphi$.

4) Die <u>Bogenlänge</u> ergibt sich als Integral: $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (\dot{r}(\varphi))^2} \, d\varphi$.

III. Für die Kurve K in Polarkoordinaten: $r(\varphi) = 2 \cdot (1 + \cos\varphi)$ ergeben sich <u>Wertetabelle</u> und <u>Graph</u>:

Wertetabelle:

w	r(w)	x	y
0	4	4	0
0.1	3.99	3.9701	0.3983
0.2	3.9601	3.8812	0.7868
0.3	3.9107	3.736	1.1557
0.4	3.8421	3.5388	1.4962
0.5	3.7552	3.2955	1.8003
0.6	3.6507	3.013	2.0613
0.7	3.5297	2.6997	2.2739
0.8	3.3934	2.3642	2.4343
0.9	3.2432	2.016	2.5405
1	3.0806	1.6645	2.5922
1.1	2.9072	1.3187	2.5909
1.2	2.7247	0.9873	2.5395
1.3	2.535	0.6781	2.4426
1.4	2.3399	0.3977	2.3059
1.5	2.1415	0.1515	2.1361
1.6	1.9416	-0.0567	1.9408
1.7	1.7423	-0.2245	1.7278
1.8	1.5456	-0.3512	1.5052
1.9	1.3534	-0.4375	1.2807
2	1.1677	-0.4859	1.0618
2.1	0.9903	-0.5	0.8548
2.2	0.823	-0.4843	0.6654
2.3	0.6674	-0.4447	0.4977
2.4	0.5252	-0.3873	0.3548
2.5	0.3977	-0.3186	0.238
2.6	0.2862	-0.2453	0.1475
2.7	0.1919	-0.1735	0.082
2.8	0.1156	-0.1089	0.0387
2.9	0.0581	-0.0564	0.0139
3	0.02	-0.0198	0.0028
3.1	0.0017	-0.0017	0.0001
3.2	0.0034	-0.0034	-0.0002
3.3	0.025	-0.0247	-0.004
3.4	0.0664	-0.0642	-0.017
3.5	0.1271	-0.119	-0.0446
3.6	0.2065	-0.1852	-0.0914
3.7	0.3038	-0.2577	-0.161
3.8	0.4181	-0.3307	-0.2558
3.9	0.5481	-0.3979	-0.377
4	0.6927	-0.4528	-0.5242
4.1	0.8504	-0.4888	-0.6958
4.2	1.0195	-0.4998	-0.8886
4.3	1.1984	-0.4803	-1.0979
4.4	1.3853	-0.4258	-1.3183
4.5	1.5784	-0.3327	-1.5429
4.6	1.7757	-0.1991	-1.7645
4.7	1.9752	-0.0245	-1.9751
4.8	2.175	0.1903	-2.1667
4.9	2.373	0.4426	-2.3314
5	2.5673	0.7283	-2.4619
5.1	2.756	1.0417	-2.5515
5.2	2.937	1.376	-2.5947
5.3	3.1087	1.7234	-2.5873
5.4	3.2694	2.0751	-2.5265
5.5	3.4173	2.4218	-2.4111
5.6	3.5511	2.7541	-2.2417
5.7	3.6694	3.0629	-2.0207
5.8	3.771	3.3393	-1.752
5.9	3.855	3.5754	-1.4413
6	3.9203	3.7642	-1.0954
6.1	3.9665	3.9002	-0.7226
6.2	3.9931	3.9793	-0.3318



b) Die Kurvenschnittpunkte mit der y-Achse ergeben sich aus der Bedingung: x(φ) = 0, also wegen $x(\varphi) = 2\cdot(1+\cos\varphi)\cdot\cos\varphi$:

$2\cdot(1+\cos\varphi)\cdot\cos\varphi = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
1+cos(φ) = 0, cos(φ) = 0	| -1
cos(φ) = -1, cos(φ) = 0	(Werte der Kosinusfunktion)
φ = π, φ = π/2, φ = 3π/2,	

woraus – u.a. wegen $y(\varphi) = 2\cdot(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi$ – die Schnittpunkte $S_1(0|2)$, $S_2(0|0)$, $S_3(0|-2)$ folgen. Die Kurvenschnittpunkt auf der x-Achse erhalten wir aus: y(φ) = 0 und damit aus:

$2\cdot(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
1+cos(φ) = 0, sin(φ) = 0	| -1
cos(φ) = -1, sin(φ) = 0	(Werte der Kosinus-, Sinusfunktion)
φ = π, φ = 0, φ = 2π,	

woraus sich (für φ=2π) der zusätzliche Schnittpunkt $S_4(4|0)$ ergibt.

c) I. Wir bilden zunächst die Ableitungen der Koordinaten der Kurve K nach dem Winkelparameter φ und erhalten u.a. nach der Produktregel:

$$\dot{x}(\varphi) = 2\cdot(-\sin\varphi)\cos\varphi + 2\cdot(1+\cos\varphi)\cdot(-\sin\varphi) = -2\sin\varphi(1+2\cos\varphi)$$

$$\dot{y}(\varphi) = 2\cdot(-\sin\varphi)\sin\varphi + 2\cdot(1+\cos\varphi)\cos\varphi = 2(\cos^2\varphi + \cos\varphi - \sin^2\varphi) = 2\cdot(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1).$$

II. Die Ableitung der Kurve lässt sich bilden aus:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2\cdot(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1)}{-2\sin\varphi(1+2\cos\varphi)} = \frac{2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1}{-\sin\varphi(1+2\cos\varphi)}.$$

III. Waagerechte Tangenten der Kurve K liegen vor bei: $\dot{y}(\varphi) = 0$, also:

$2\cdot(2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1) = 0$	| :2
$2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0$	| z = cos(φ) (Substitution)
$2z^2 + z - 1 = 0$	(abc-Formel: a=2, b=1, c=-1)
$z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}$	(Ausrechnen)

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$z_1 = -1$, $z_2 = 0{,}5$ | $\cos(\varphi) = z$ (Rücksubstitution)
$\cos(\varphi) = -1$, $\cos(\varphi) = 0{,}5$ (Werte der Kosinusfunktion)
$\varphi = \pi$, $\varphi = \pi/3$, $\varphi = 5\pi/3$,

so dass als Punkte mit waagerechter Tangente zunächst folgen: $P_1(0{,}75|2{,}6)$, $P_2(0{,}75|-2{,}6)$. An der Stelle $S_2(0|0)$ (bei $\varphi=\pi$) ergibt sich für die Ableitung y‘ indes ein unbestimmter Ausdruck vom Typ 0/0, doch gilt nach den Regeln von de l’Hospital:

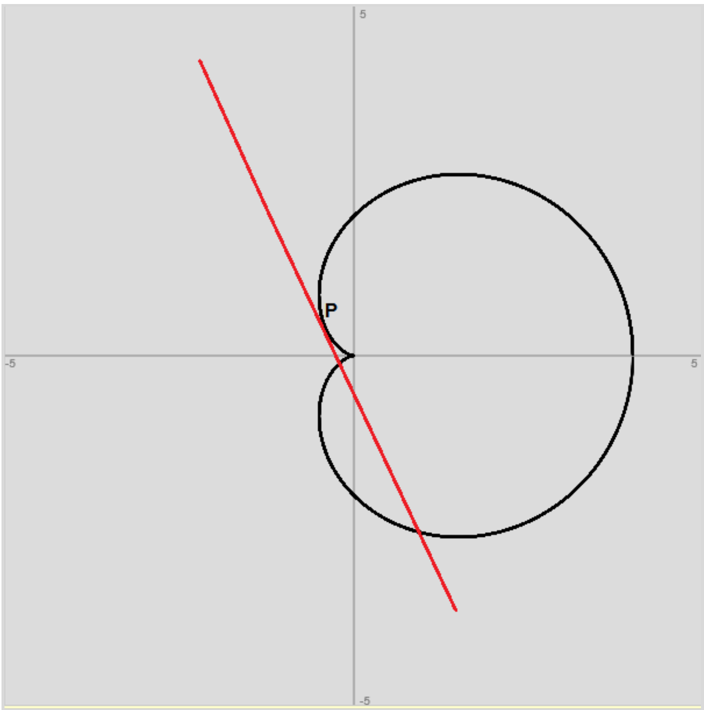
$$y'(\pi) = \lim_{\varphi \to \pi} \frac{2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1}{-\sin\varphi(1+2\cos\varphi)} = \lim_{\varphi \to \pi} \frac{4\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi}{1 - 2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi} = \frac{0}{-1} = 0\,,$$

so dass auch in diesem Kurvenpunkt eine waagerechte Tangente vorliegt.

IV. <u>Senkrechte Tangenten</u> der Kurve K liegen vor bei: $\dot{x}(\varphi) = 0$, also:

$-2\sin\varphi(1+2\cos\varphi) = 0$ | :(-2)
$\sin\varphi(1+2\cos\varphi) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$\sin(\varphi) = 0$, $1+2\cos(\varphi) = 0$ | -1
$\sin(\varphi) = 0$, $2\cos(\varphi) = -1$ | :2
$\sin(\varphi) = 0$, $\cos(\varphi) = -0{,}5$ | :2
$\varphi = 0$, [$\varphi = \pi$], $\varphi = 2\pi$, $\varphi = 2\pi/3$, $\varphi = 4\pi/3$,

so dass die Punkte mit senkrechter Tangente $Q_1(-0{,}25|0{,}86)$, $Q_2(-0{,}25|-0{,}86)$ und $S_4(4|0)$ sind.



d) Für $\varphi = 3\pi/4$ erhalten wir wegen $x(\frac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \left(1+\cos(\frac{3}{4}\pi)\right) \cdot \cos(\frac{3}{4}\pi) = 2(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-\sqrt{2}$

und $y(\frac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \left(1+\cos(\frac{3}{4}\pi)\right) \cdot \sin(\frac{3}{4}\pi) = 2(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}-1$ als Kurvenpunkt P(-0,41|0,41)

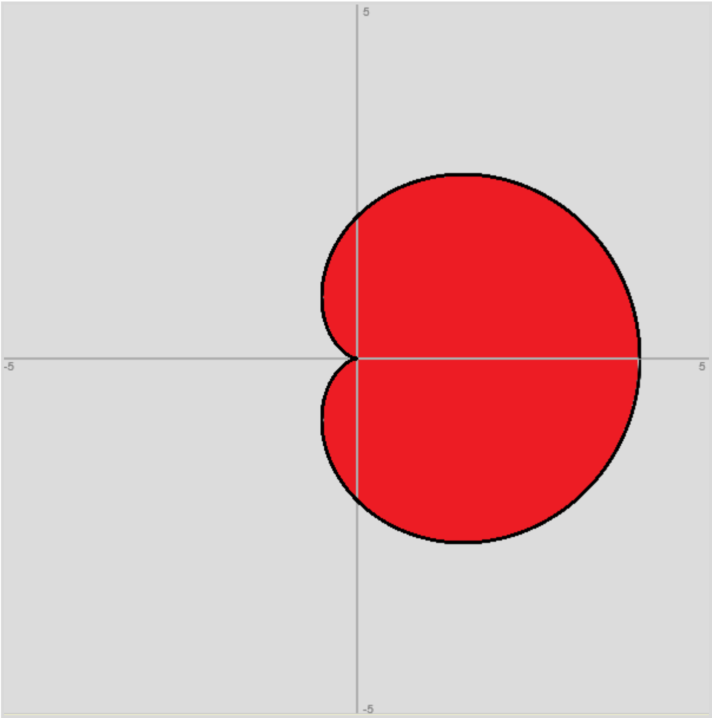
sowie die Ableitung:

$$y_0' = \frac{2\cos^2(\frac{3}{4}\pi) + \cos(\frac{3}{4}\pi) - 1}{-\sin(\frac{3}{4}\pi)(1+2\cos(\frac{3}{4}\pi))} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1-\sqrt{2})} = \frac{2-\sqrt{2}-2}{2-\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \approx -2{,}41\,,$$

woraus für die gesuchte <u>Tangentengleichung</u> im Punkt P(-0,41|0,41) folgt:

t: $y = y_0'(x-x_0) + y_0 = -2{,}41(x-(-0{,}41)) + 0{,}41 = -2{,}41(x+0{,}41) + 0{,}41 = -2{,}41x - 0{,}58$.

e) Wir berechnen den Flächeninhalt der von der Kardioide K umgrenzten Fläche, indem wir über den Winkelparameter von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_2 = 2\pi$ unter Verwendung der Sektorenformel integrieren.



Es gilt:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(r(\varphi))^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\cdot(1+\cos\varphi))^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}4\cdot(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$2\cdot\left[\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{2}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)\right]_0^{2\pi} = (*)$$

unter Verwendung des trigonometrischen Integrals $\int\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)$ (was wiederum durch Produktintegration zu lösen ist). Weiter folgt:

$$(*) = 2\cdot\left[\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{2}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)\right]_0^{2\pi} = [3\varphi+4\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi]_0^{2\pi} =$$

$$(3\cdot 2\pi+0-0)-(0+0-0) = 6\pi$$

und damit der gesuchte Flächeninhalt A = 6π.

f) Bei der Bestimmung der Bogenlänge der gesamten Kardioide K ist wegen der Symmetrie der Kurve das entsprechende Integral nur auf die halbe Bogenlänge anzuwenden, d.h. auf die Winkelparameter von $\varphi_1 = 0$ bis $\varphi_2 = \pi$. Es ergibt sich damit wegen $r(\varphi) = 2\cdot(1+\cos\varphi)$ und $\dot r(\varphi) = 2\cdot(-\sin\varphi) = -2\sin\varphi$:

$$\frac{l}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{(r(\varphi))^2+(\dot r(\varphi))^2}\,d\varphi = \int_0^{\pi}\sqrt{(2\cdot(1+\cos\varphi))^2+(-2\sin\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi}\sqrt{4\cdot(1+\cos\varphi)^2+4\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+1}\,d\varphi =$$

$$2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi = (**)$$

u.a. wegen der trigonometrischen Identität $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi) = 1$. Auf Grund einer weiteren Identität, nämlich $1+\cos\varphi = 2\cos^2(\frac{\varphi}{2})$ folgt:

$$(**) = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2(\frac{\varphi}{2})}\,d\varphi = 4\int_0^{\pi}\cos(\frac{\varphi}{2})\,d\varphi = 4\cdot\left[2\sin(\frac{\varphi}{2})\right]_0^{\pi} =$$

$$4\cdot\left(2\sin(\frac{\pi}{2}) - 2\sin 0\right) = 4\cdot(2-0) = 8$$

und damit die gesamte Bogenlänge der Kurve l = 16.

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 295