

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurven (Parameterdarstellung)

Aufgabe: Gegeben sei für reelle $t \geq 0$ die Kurve K in der Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (3\pi + t) \cos t \\ (3\pi + t) \sin t \end{pmatrix}$$

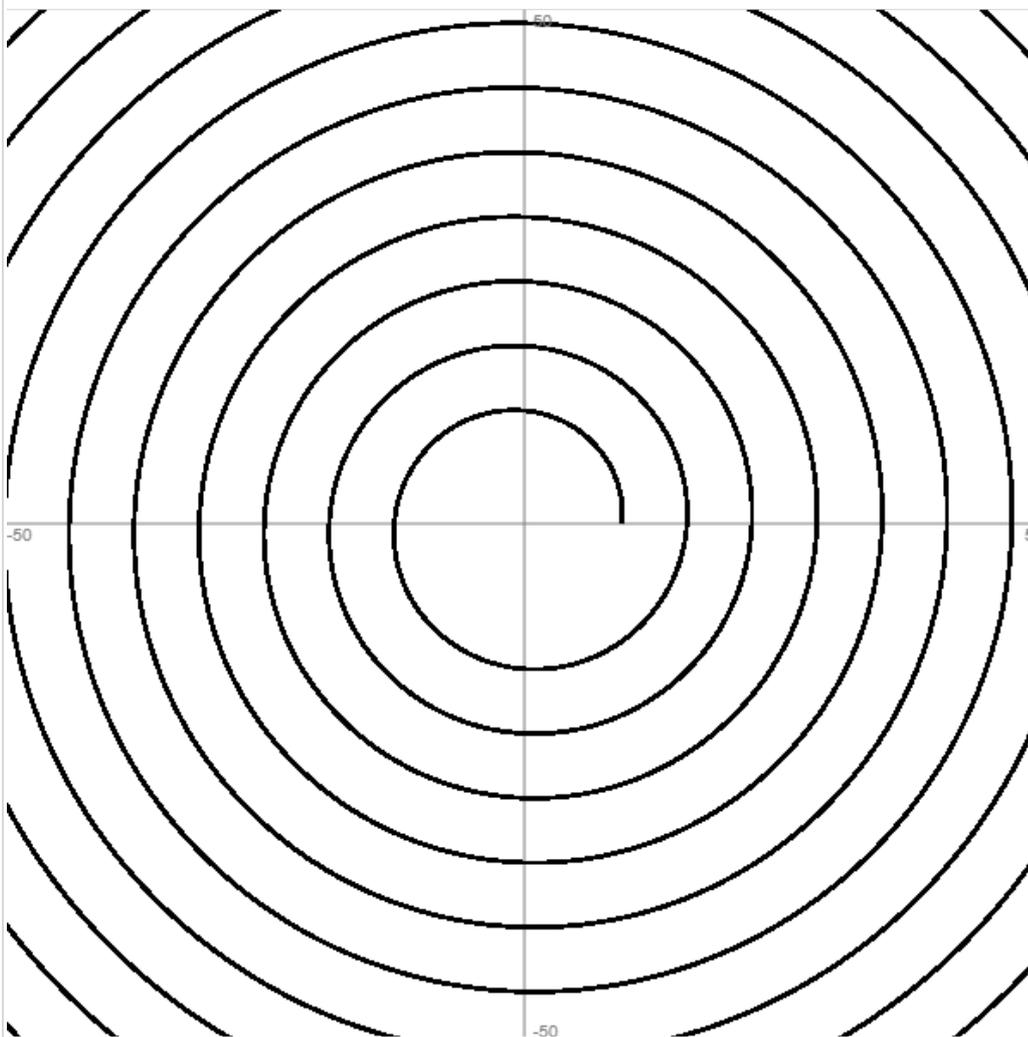
im x_1 - x_2 -Koordinatensystem. Skizziere die Kurve K im Koordinatensystem (Wertetabelle, Graph). Bilde die Ableitung.

Lösung: I. Allgemein gilt für Kurven K im x-y-Koordinatensystem: Für jeden Parameter t (aus dem Definitionsbereich der Kurve) ergibt sich der Kurvenpunkt $P(x_1(t)|x_2(t))$, die Menge aller Kurvenpunkte ist die Kurve K. Die Ableitungen der Parameterkoordinaten $x_1(t)$, $x_2(t)$ nach dem Parameter t sind: $x_1'(t)$, $x_2'(t)$, wodurch sich der Ableitungsvektor $\vec{x}'(t)$ ergibt.

II. Für die Kurve K in der Parameterdarstellung: $x_1(t) = (3\pi + t) \cos t$, $x_2(t) = (3\pi + t) \sin t$ ergeben sich Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:		
t	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	9.4248	0
0.5	8.7098	4.7582
1	5.6325	8.7721
1.5	0.7728	10.8974
2	-4.7544	10.3885
2.5	-9.5535	7.1366
3	-12.3004	1.7534
3.5	-12.1035	-4.5338
4	-8.775	-10.1599
4.5	-2.9353	-13.6119
5	4.0918	-13.8323
5.5	10.5767	-10.53
6	14.8104	-4.3099
6.5	15.5519	3.4257
7	12.3827	10.7909
7.5	5.8667	15.8754
8	-2.5353	17.2393
8.5	-10.7909	14.3127
9	-16.7874	7.5932
9.5	-18.8713	-1.4222

10	-16.2988	-10.5675
10.5	-9.475	-17.5277
11	0.0904	-20.4246
11.5	10.113	-18.3186
12	18.0794	-11.496
12.5	21.8765	-1.4541
13	20.3493	9.4222
13.5	13.6384	18.4266
14	3.203	23.2048
14.5	-8.4915	22.3672
15	-18.5552	15.8831
15.5	-24.3877	5.1462
16	-24.3483	-7.3199
16.5	-18.2095	-18.4529
17	-7.2711	-25.4047
17.5	5.9084	-26.2685
18	18.109	-20.5957
18.5	26.236	-9.5637
19	28.1037	4.2602
19.5	23.0188	17.5151
20	12.0077	26.8632



Die Kurve stellt eine Spirale dar.

III. Nach der Produktregel für das Ableiten gilt in beiden Komponenten von $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (3\pi + t) \cos t \\ (3\pi + t) \sin t \end{pmatrix}$:

$$x_1'(t) = 1 \cdot \cos t + (3\pi + t)(-\sin t) = \cos t - (3\pi + t) \sin t$$

$$x_2'(t) = 1 \cdot \sin t + (3\pi + t) \cos t = \sin t + (3\pi + t) \cos t,$$

so dass sich als Ableitung der Spirale $\vec{x}(t)$ ergibt:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - (3\pi + t) \sin t \\ \sin t + (3\pi + t) \cos t \end{pmatrix}.$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1277