Michael Buhlmann

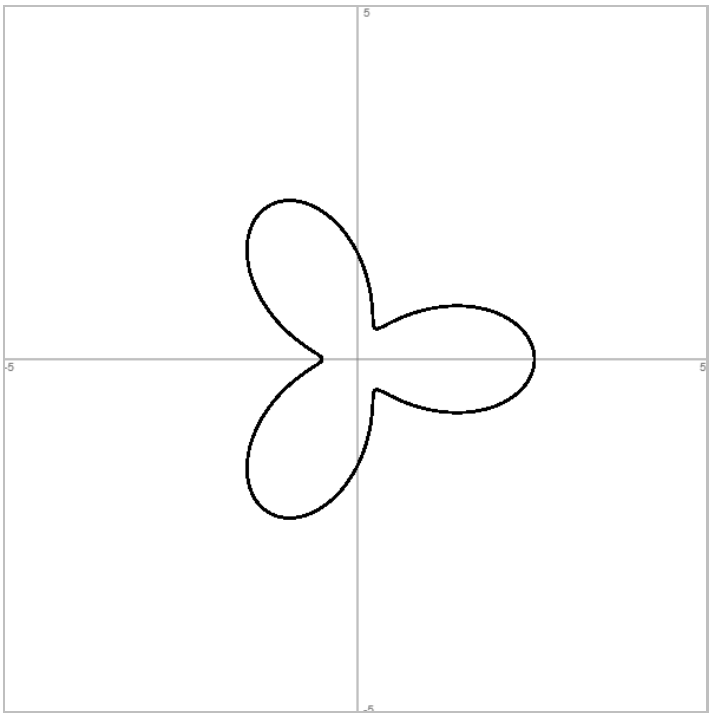
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurven (Parameterdarstellung)

Aufgabe: Gegeben sei für reelle tε[0; 2π] die Kurve K in der Parameterdarstellung:

$$x(t) = (1{,}5 + \cos(3t))\cos(t)$$
$$y(t) = (1{,}5 + \cos(3t))\sin(t)$$

im x-y-Koordinatensystem. Berechne den Inhalt der Fläche innerhalb der Kurve.

Lösung: I. Die (geschlossene) Kurve K in der Parameterdarstellung: $x(t) = (1{,}5 + \cos(3t))\cos(t)$, $y(t) = (1{,}5 + \cos(3t))\sin(t)$ hat das folgende Aussehen:



II. Die Kurve K lässt sich leicht mit Hilfe der <u>Polarkoordinaten</u> x(t) = r(φ)cos(φ), y(t) = r(φ)sin(φ) mit: r(φ) = 1,5+cos(3φ), 0≤φ≤2π, darstellen, so dass für die von der Kurve eingeschlossene Fläche A die <u>Sektorenformel</u>

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 \, d\varphi$$

gilt. Es ergibt sich:

$$A = \int_0^{2\pi} (r(\varphi))^2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (1{,}5 + \cos(3\varphi))^2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (2{,}25 + 3\cos(3\varphi) + \cos^2(3\varphi)) d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} 2{,}25 d\varphi + \int_0^{2\pi} 3\cos(3\varphi) d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos^2(3\varphi) d\varphi = [2{,}25\varphi]_0^{2\pi} + [\sin(3\varphi)]_0^{2\pi} + \left[\frac{3x - \sin(3x)\cos(3x)}{6}\right]_0^{2\pi} =$$

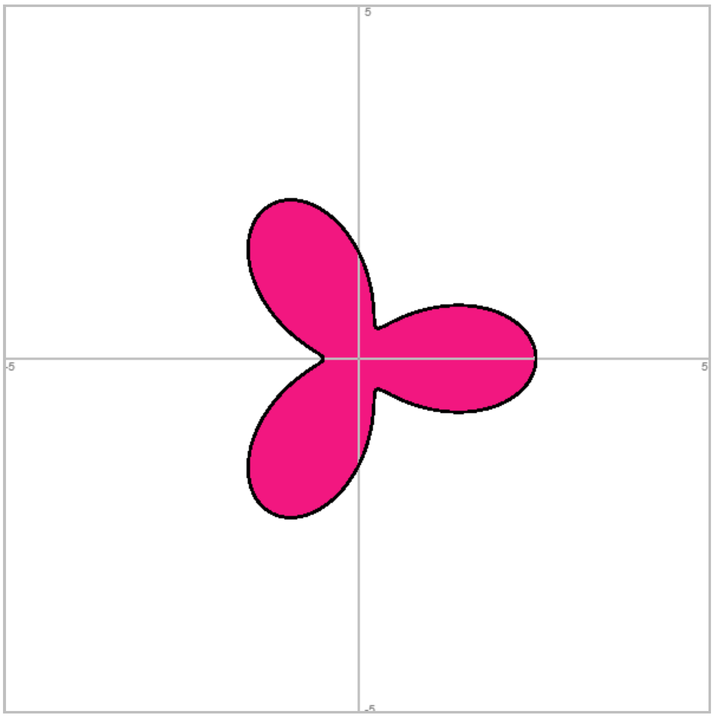
$$4{,}5\pi + 0 + \pi = 5{,}5\pi \Rightarrow$$

A ≈ 17,28 FE

unter Verwendung der unbestimmten Integrale:

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

$$\int \cos^2(ax)dx = \frac{ax - \sin(ax)\cos(ax)}{2a}.$$



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1453