Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvenintegrale

Aufgabe: Berechne das Kurvenintegral:

$$\int_C f(x,y)d(x,y)$$

mit der Funktion $f(x,y)=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ und der Kurve C: $\overset{->}{c}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$, 0≤t≤2π.

Lösung: I. <u>Kurvenintegrale</u> (Linienintegrale) von Funktionen f: D ⊂ $\mathbf{R}^n$ -> $\mathbf{R}^n$ mit $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ = $\begin{pmatrix}f_1(x_1,x_2,\dots x_n)\\f_2(x_1,x_2,\dots x_n)\\\dots\\f_n(x_1,x_2,\dots x_n)\end{pmatrix}$ über einer Kurve C: [a; b] -> D mit $\overset{->}{c}(t)=\begin{pmatrix}c_1(t)\\c_2(t)\\\dots\\c_n(t)\end{pmatrix}$ lassen sich berechnen als:

$$\int_C f(x_1,x_2,\dots x_n)d(x_1,x_2,\dots x_n)=\int_a^b\left[\sum_{i=1}^n f_i(c_1(t),c_2(t),\dots c_n(t))\cdot c_i{}'(t)\right]dt\,.$$

Dabei seien alle zugrundeliegenden Funktionen der Einfachheit halber als differenzierbar angenommen.

II. Die Kurve C: $\overset{->}{c}(t)=\begin{pmatrix}c_1(t)\\c_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$, 0≤t≤2π, beschreibt einen Einheitskreis (Vollkreis), der im Punkt P(1|0) beginnt und dort auch endet. Mit $c_1(t)$ = cos(t) = x(t), $c_2(t)$ = sin(t) = y(t) sowie mit der Funktion f(x,y) = $\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ gilt: -y(t) = -sin(t), x(t) = cos(t). Weiter ist:

dx(t)/dt = x‘ = (cos(t))‘ = -sin(t) => dx = -sin(t)dt
dy(t)/dt = y‘ = (sin(t))‘ = cos(t) => dy = cos(t)dt.
Damit hat das <u>Kurvenintegral</u> den Wert:

$$\int_C f(x,y)d(x,y)=\int_C\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}d(x,y)=\int_C(-ydx+xdy)=\int_0^{2\pi}\left(-\sin t\cdot(-\sin t)dt+\cos t\cdot\cos tdt\right)=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\sin t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt\underset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{=}\int_0^{2\pi}1dt=[t]_0^{2\pi}=2\pi-0=2\pi.$$

III. Wir folgern noch: Der Anfangs- und Endpunkt P(1|0) der Kurve C ist identisch, der Wert des Kurvenintegrals verschwindet nicht. Die Funktion $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ist damit nicht konservativ, d.h. kein konservatives Vektorfeld. Eine Stammfunktion F zu f mit $\nabla F = f$ (Gradient) existiert demnach nicht, was – ebenso wie das Verschwinden des Kurvenintegrals auf einer geschlossenen Kurve oder die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals – die Voraussetzung für die Konservativität der Funktion f(x,y) wäre.

www.michael-buhlmann.de / 06.2021 / Aufgabe 1444