Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvenintegrale

Aufgabe: Berechne das Kurvenintegral:

$$\int_C f(x,y)d(x,y)$$

mit der Funktion $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und

a) der Kurve C_1: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 0≤t≤1;

b) der Kurve C_2: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, 0≤t≤π/2.

Lösung: a) I. Kurvenintegrale (Linienintegrale) von Funktionen f: $D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ mit $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\ldots x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\ldots x_n) \\ \ldots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots x_n) \end{pmatrix}$ über einer Kurve C: [a; b] -> D mit $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \ldots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ lassen sich berechnen als:

$$\int_C f(x_1,x_2,\ldots x_n)d(x_1,x_2,\ldots x_n) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n f_i(c_1(t),c_2(t),\ldots c_n(t)) \cdot c_i'(t) \right] dt .$$

Dabei seien alle zugrundeliegenden Funktionen der Einfachheit halber als differenzierbar angenommen.

II. Die Kurve C_1: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$, 0≤t≤1, beschreibt einen Weg in $\mathbf{R}^2$ zwischen den Punkten P(1|0) und Q(0|1), ein Geradenstück. Es ist: x = 1-t, y = t, mit der Funktion f(x,y) = $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ gilt: -y = - t, x = t, weiter ist: x‘ = (1-t)‘ = -1, y‘ = (t)‘ = 1. Damit hat das Kurvenintegral den Wert:

$$\int_C f(x,y)d(x,y) = \int_C \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} d(x,y) = \int_C (-ydx + xdy) = \int_0^1 \left(-t \cdot (-1) + (1-t) \cdot 1\right)dt =$$

$$\int_0^1 (t+1-t)dt = \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

b) I. Auch die Kurve C_2: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, 0≤t≤π/2, beschreibt einen Weg in $\mathbf{R}^2$ zwischen den

Punkten P(1|0) und Q(0|1) (wegen cos(0) = 1, sin(0) = 0 bzw. cos(π/2) = 0, sin(π/2) = 1), allerdings einen Vierteleinheitskreis. Mit $c_1(t) = \cos(t) = x(t)$, $c_2(t) = \sin(t) = y(t)$ sowie mit der Funktion

f(x,y) = $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ gilt: -y(t) = -sin(t), x(t) = cos(t). Weiter ist:

dx(t)/dt = x' = (cos(t))' = -sin(t) => dx = -sin(t)dt
dy(t)/dt = y' = (sin(t))' = cos(t) => dy = cos(t)dt.

Damit hat das Kurvenintegral den Wert:

$$\int_C f(x,y)d(x,y) = \int_C \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} d(x,y) = \int_C (-ydx + xdy) = \int_0^{\pi/2} \left(-\sin t \cdot (-\sin t)dt + \cos t \cdot \cos t dt\right) =$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(-\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t\right) dt = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt \underset{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}{=} \int_0^{\pi/2} 1dt = [t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

II. Wir folgern noch: In Aufgabe a) und b) führen zwei unterschiedlichen Wege zwischen den Punkten P(1|0) und Q(0|1) zu unterschiedlichen Werten der Kurvenintegrale. Die Funktion $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ist damit nicht konservativ, d.h. kein konservatives Vektorfeld. Eine Stammfunktion F zu f mit $\nabla F = f$ (Gradient) existiert demnach nicht, was – ebenso wie die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals – die Voraussetzung für die Konservativität der Funktion f(x,y) wäre.

Die Funktion f(x,y) ist auch deswegen nicht konservativ, weil sie die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt, d.h. es gilt für $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ nicht:

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x}$$

wegen:

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1.$$

www.michael-buhlmann.de / 06.2021 / Aufgabe 1445