

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Lineare Gleichungen (mit Formvariablen)

Aufgabe: Bestimme für feste reelle Zahlen a, b, c die Lösung der linearen Gleichung:

$$ax + b = cx + 5.$$

Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von linearen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x , die folgende Vorgehensweise: Lineare Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x , die der Form $ax + b = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b genügen. Die Lösung der linearen

Gleichung (*) ist für $a \neq 0$ dann: $x = -\frac{b}{a}$. Um die Lösung einer linearen Gleichung der Form (*) zu

erlangen, sind Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; es gilt Strichrechnung vor Punktrechnung.

Formvariablen (oder Parameter) werden dabei behandelt wie normale Zahlen, werden also als feste reelle Größen vorausgesetzt.

II. Wir gehen mittels Gleichungsumformungen wie folgt vor:

$$\begin{array}{ll} ax + b = cx + 5 & | -b \\ ax = cx + 5 - b & | -cx \\ ax - cx = 5 - b & \text{(Ausklammern von } x) \\ (a - c)x = 5 - b & | : (a - c) \text{ (falls } a - c \neq 0, \text{ d.h. } a \neq c) \\ x = \frac{5 - b}{a - c} \end{array}$$

Wir erhalten den Wert $x = \frac{5 - b}{a - c}$ als (eindeutige) Lösung, falls $a \neq c$ gilt; Lösungsmenge ist hier

also: $L = \left\{ \frac{5 - b}{a - c} \right\}$. Gilt hingegen $a = c$, so ergibt sich aus der Gleichung $(a - c)x = 5 - b$ die Beziehung:

$$\begin{array}{l} 0x = 5 - b \\ 0 = 5 - b, \end{array}$$

die im Fall $5 - b = 0$, d.h. $b = 5$, die Gleichung $0 = 0$ ergibt und somit die ganzen reellen Zahlen als Lösungsmenge, also $L = \mathbf{R}$ besitzt. Ist hingegen $b \neq 5$, so führt die Gleichung $0 = 5 - b$ auf einen Widerspruch; in diesem Fall ist die Lösungsmenge die leere Menge; es gilt also: $L = \{\}$.

III. Zusammenfassend können wir die Lösungen der linearen Gleichung $ax + b = cx + 5$ festhalten als:

1. Fall: $a \neq c$: $L_{a \neq c} = \left\{ \frac{5 - b}{a - c} \right\}$

2. Fall: $a = c, b = 5$: $L_{a=c, b=5} = \mathbf{R}$

3. Fall: $a = c, b \neq 5$: $L_{a=c, b \neq 5} = \{\}$.