**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Lineare Algebra
## > Lineare Gleichungssysteme

---

**Aufgabe**: Lineare Gleichungssysteme lassen sich mit Mitteln der Vektorrechnung lösen. Dem entspricht es, dass für ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten die Darstellung:

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$$

mit reellen Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$ und reellen dreidimensionalen Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{b}$ greift. Löse unter Benutzung von Skalar-, Kreuz- und Spatprodukt, falls möglich, das lineare Gleichungssystem jeweils nach der Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$ auf.

**Lösung**: I. Ein <u>lineares Gleichungssystem</u> bestehe aus 3 Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis 3) und 3 Unbekannten und habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad (1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \qquad (2)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \qquad (3)$$

mit den reellen Variablen $x_1$, $x_2$, $x_3$, den reellen Koeffizienten $a_{11}$, … $a_{33}$ und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) $b_1$, $b_2$, $b_3$. Mit Hilfe von dreidimensionalen Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ lässt sich das lineare Gleichungssystem darstellen als Vektorgleichung:

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b} \,.$$

II. In der Vektorrechnung mit dreidimensionalen reellen Vektoren sind drei Produkte definiert. Für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ gilt:

(Inneres) <u>Skalarprodukt</u>: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (als reelle Zahl)

(Äußeres Vektor-) <u>Kreuzprodukt</u>: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ (als Vektor)

<u>Spatprodukt</u>: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$ (als reelle Zahl)

Jedes der Produkte hat seine eigenen Gesetzmäßigkeiten, die benutzt werden können. Das Skalarprodukt ist kommutativ und null, wenn die Vektoren orthogonal zueinander sind, das Kreuzprodukt ist antikommutativ und erzeugt einen Vektor, der senkrecht auf den Vektoren steht, die das Kreuzprodukt bilden, den Nullvektor $\vec{0}$, wenn die beiden Vektoren Vielfache voneinander sind, das Spatprodukt setzt sich aus Kreuz- und Skalarprodukt zusammen.

III. Um die Variable $x_1$ auszurechnen, gehen wir wie folgt vor:

$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$ | $\times \vec{a}_2$ (von rechts)

$x_1 \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 + x_2 \vec{a}_2 \times \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 \times \vec{a}_2 = \vec{b} \times \vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \times \vec{a}_2 = \vec{0}$)

$x_1 \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 + x_2 \vec{0} + x_3 \vec{a}_3 \times \vec{a}_2 = \vec{b} \times \vec{a}_2$ ($x_2 \vec{0} = \vec{0}$)

$x_1 \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 \times \vec{a}_2 = \vec{b} \times \vec{a}_2$ | $\cdot \vec{a}_3$

$x_1 \left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3 + x_3 \left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3$ ($\vec{a}_3 \times \vec{a}_2$ senkrecht zu $\vec{a}_3$)

$x_1 \left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3 + x_3 \cdot 0 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3$ ($x_3 \cdot 0 = 0$)

$x_1 \left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3$ | $: \left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3 \; (\neq 0)$

$$x_1 = \frac{\left(\vec{b} \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3}{\left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3}$$

Dabei ist das Spatprodukt $\left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3 \neq 0$, wenn die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ linear unabhängig voneinander sind.

IV. Auf ähnliche Weise errechnen wir die Variable $x_2$ im linearen Gleichungssystem:

$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$ | $\times \vec{a}_3$ (von rechts)

$x_1 \vec{a}_1 \times \vec{a}_3 + x_2 \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 + x_3 \vec{a}_3 \times \vec{a}_3 = \vec{b} \times \vec{a}_3$ ($\vec{a}_3 \times \vec{a}_3 = \vec{0}$)

$x_1 \vec{a}_1 \times \vec{a}_3 + x_2 \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 + x_3 \vec{0} = \vec{b} \times \vec{a}_3$ ($x_3 \vec{0} = \vec{0}$)

$x_1 \vec{a}_1 \times \vec{a}_3 + x_2 \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \vec{b} \times \vec{a}_3$ | $\cdot \vec{a}_1$

$x_1 \left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1 + x_2 \left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1$ ($\vec{a}_1 \times \vec{a}_3$ senkrecht zu $\vec{a}_3$)

$x_1 \cdot 0 + x_2 \left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1$ ($x_3 \cdot 0 = 0$)

$x_2 \left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1$ | $: \left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1 \; (\neq 0)$

$$x_2 = \frac{\left(\vec{b} \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1}{\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1}$$

Dabei ist das Spatprodukt $\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1 \neq 0$, wenn die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ linear unabhängig voneinander sind.

IV. Wiederum auf ähnliche Weise errechnen wir die Variable $x_3$ im linearen Gleichungssystem:

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b} \qquad | \times \vec{a}_1 \text{ (von rechts)}$$

$$x_1 \vec{a}_1 \times \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 \times \vec{a}_1 + x_3 \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \vec{b} \times \vec{a}_1 \qquad (\vec{a}_1 \times \vec{a}_1 = \vec{0})$$

$$x_1 \vec{0} + x_2 \vec{a}_2 \times \vec{a}_1 + x_3 \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \vec{b} \times \vec{a}_1 \qquad (x_1 \vec{0} = \vec{0})$$

$$x_2 \vec{a}_2 \times \vec{a}_1 + x_3 \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \vec{b} \times \vec{a}_1 \qquad | \cdot \vec{a}_2$$

$$x_2 \left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 + x_3 \left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 \qquad (\vec{a}_2 \times \vec{a}_1 \text{ senkrecht zu } \vec{a}_2)$$

$$x_2 \cdot 0 + x_3 \left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 \qquad (x_2 \cdot 0 = 0)$$

$$x_3 \left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 = \left(\vec{b} \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 \qquad | : \left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 \ (\neq 0)$$

$$x_3 = \frac{\left(\vec{b} \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2}{\left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2}$$

Dabei ist das Spatprodukt $\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 \neq 0$, wenn die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ linear unabhängig voneinander sind.

V. Wir fassen zusammen: Im Falle der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$$

die eindeutig bestimmten <u>Lösungen</u>:

$$x_1 = \frac{\left(\vec{b} \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3}{\left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) \cdot \vec{a}_3}, \quad x_2 = \frac{\left(\vec{b} \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1}{\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right) \cdot \vec{a}_1}, \quad x_3 = \frac{\left(\vec{b} \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2}{\left(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2}.$$

Die Lösungen entsprechen letztlich der Cramerschen Regel mit ihren Quotienten aus Determinanten.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1274