

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe: Löse das nachstehende lineare Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten:

$$\begin{aligned} + 2x_1 & & - 5x_3 & = 17 \\ & + 3x_2 - 4x_3 & = 6 \\ + 4x_1 + 2x_2 & & & = 0 \end{aligned}$$

Lösung: I. Das vorstehende lineare Gleichungssystem wird mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (Gaußsches Eliminationsverfahren) berechnet. Der Gauß-Algorithmus geht von der Tabellenform des linearen Gleichungssystems aus (Anfangstableau). Zur Erzeugung einer Dreiecks-/Stufenform (Endtableau) wird eine obere Tabellenzeile (als Gleichung des Gleichungssystems) mit den darunterliegenden Zeilen (als weitere Gleichungen des Gleichungssystems) so verrechnet, dass von links nach rechts nacheinander (in den Gaußschritten) spaltenweise Nullen unterhalb der oben-links beginnenden Hauptdiagonale der jeweiligen (Anfangs-, Zwischen-) Tabelle erzeugt werden. Der Gauß-Algorithmus endet, wenn unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen. Die dadurch entstandene Dreiecks-/Stufenform (Endtableau) gibt Auskunft über die Lösbarkeit des Gleichungssystems (keine, eine, unendlich viele Lösung/en) und über Größe und Aussehen der eventuellen Lösungen (ohne oder mit reellem Parameter/reellen Parametern).

II. Das Anwenden des Gauß-Algorithmus auf das lineare 3x3-Gleichungssystem ergibt:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} + 2x_1 & & - 5x_3 & = 17 \\ & + 3x_2 - 4x_3 & = 6 \\ + 4x_1 + 2x_2 & & & = 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 2 & 0 & -5 & 17 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (3) - 2 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -5 & 17 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 10 & -34 \end{array}$$

2. Schritt: $3 \cdot (3) - 2 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -5 & 17 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 38 & -114 \end{array}$$

Endtableau -> Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} + 2x_1 & & - 5x_3 & = 17 \\ & + 3x_2 - 4x_3 & = 6 \\ & & + 38x_3 & = -114 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$x_3 = -3$$

$$x_2 = -2$$

$$x_1 = 1$$

-> eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

-> Lösungsmenge $L = \{(1; -2; -3)\}$

Damit ist das lineare Gleichungssystem gelöst.