

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Lineare Gleichungssysteme/Mischungen

Aufgabe: 80-prozentige Salzsäure der Masse 0,8 Kilogramm (kg) soll durch Wasser so verdünnt werden, dass 20-prozentige Salzsäure entsteht.

1. Lösung: I. Werden zwei Flüssigkeiten mit unterschiedlichen prozentualen Beimengungen $a\%$ und $b\%$ einer Substanz vermischt zu einer $c\%$ -prozentigen Flüssigkeit bei $a < c < b$, so gilt das nachstehende Mischungskreuz der b - bzw. a -prozentigen Anteile an der Mischung:

$a\%$		$b-c$ $a\%$ -Anteile
	$c\%$	
$b\%$		$c-a$ $b\%$ -Anteile

Das Verhältnis der Massen x_a der a -prozentigen und x_b der b -prozentigen Flüssigkeit entspricht dem Verhältnis der Anteile $b-c$ der a -prozentigen und $c-a$ der b -prozentigen Flüssigkeit, also:

$$x_a/x_b = (b-c)/(c-a).$$

II. Es sei x_b ($= 0,8$ kg) die Menge an 80-prozentiger Salzsäure, x_a die Menge des der Salzsäure zuzusetzenden Wassers mit 0 Prozent Salzsäure. Die Menge der durch Mischung entstehenden 20-prozentigen Salzsäure ist $x_a + x_b = x_c$ groß.

Laut dem Mischungskreuz gilt für die Anteile von 80-prozentiger Salzsäure und Wasser an der 20-prozentigen Salzsäure:

0%		80-20 = 60 0%-Anteile
	20%	
80%		20-0 = 20 80%-Anteile

Die 80-prozentige Salzsäure hat die Masse $x_b = 0,8$ kg, die Masse des zuzusetzenden Wassers x_a errechnet sich als:

$$x_a/x_b = (80-20)/(20-0) \Leftrightarrow x_a/0,8 = 60/20 = 3 \Leftrightarrow x_a = 3 \cdot 0,8 = 2,4 \text{ kg}.$$

Die Masse an 20-prozentigen Salzsäure beträgt damit: $x_c = x_a + x_b = 2,4 + 0,8 = 3,2$ kg.

2. Lösung: Mit x_a als Menge des der Salzsäure zuzusetzenden Wassers mit 0 Prozent Salzsäure, x_b ($= 0,8$ kg) als Menge an 80-prozentiger Salzsäure und $x_a + x_b = x_c$ als Menge der durch Mischung entstehenden 20-prozentigen Salzsäure ergibt sich mit den Prozentanteilen $a = 0\% = 0$, $b = 80\% = 0,8$ und $c = 20\% = 0,2$ das lineare Gleichungssystem:

$$x_a + x_b = x_c \text{ (Flüssigkeitsmengen) (1)}$$

$$0 \cdot x_a + 0,8 \cdot x_b = 0,2 \cdot x_c \text{ (Salzsäureanteile) (2)}.$$

Division der Gleichungen (1) und (2) durch x_c bei Umbenennung $x^*_a = x_a/x_c$, $x^*_b = x_b/x_c$ ergibt ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$x^*_a + x^*_b = 1 \text{ (1a)}$$

$$0 \cdot x^*_a + 0,8 \cdot x^*_b = 0,2 \Leftrightarrow 0,8 \cdot x^*_b = 0,2 \text{ (2a)}.$$

Gleichung (2a) führt auf: $x^*_b = 0,2/0,8 = 0,25$, Gleichung (1a) mit $x^*_b = 0,25$ auf:

$$x^*_a + 0,25 = 1 \Leftrightarrow x^*_a = 0,75,$$

womit das lineare Gleichungssystem gelöst ist. Wegen der vorgegebenen Menge $x_b = 0,8$ kg und wegen $x^*_b = 0,25$ folgt aufgrund von $x^*_b = x_b/x_c$:

$$0,25 = 0,8/x_c \Leftrightarrow x_c = 0,8/0,25 = 3,2 \text{ kg}$$

als Menge an 20-prozentiger Salzsäure. Daraus ergibt sich als Menge des zugesetzten Wassers:

$$x_a + 0,8 = 3,2 \Leftrightarrow x_a = 2,4 \text{ kg}.$$