

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Lineare Gleichungssysteme/Mischungen

Aufgabe: Eine Chrom-Nickel-Legierung enthält Chrom und Nickel im Verhältnis 1 zu 4, eine zweite Legierung 40 Prozent Chrom und 60 Prozent Nickel. Es soll aus den beiden vorhandenen Legierungen 1 Kilogramm (kg) einer Legierung hergestellt werden, die 25 Prozent Chrom und 75 Prozent Nickel enthält.

1. Lösung: I. Werden zwei Legierungen mit unterschiedlichen prozentualen Beimengungen $a\%$ und $b\%$ einer Substanz vermischt zu einer c -prozentigen Legierung bei $a < c < b$, so gilt das nachstehende Mischungskreuz der b - bzw. a -prozentigen Anteile an der Legierung:

$a\%$		$b-c$ $a\%$ -Anteile
	$c\%$	
$b\%$		$c-a$ $b\%$ -Anteile

Das Verhältnis der Massen x_a der a -prozentigen und x_b der b -prozentigen Legierung entspricht dem Verhältnis der Anteile $b-c$ der a -prozentigen und $c-a$ der b -prozentigen Legierung, also:

$$x_a/x_b = (b-c)/(c-a).$$

II. Es sei x_a die Menge der Chrom-Nickel-Legierung mit 20-prozentigem Chromanteil (Verhältnis 1 zu 4 bei insgesamt 5 Anteilen), x_b die Menge der Chrom-Nickel-Legierung mit 40 Prozent Chromanteil. Die Menge x_c der durch Mischung entstehenden Legierung mit 25 Prozent Chromanteil ist $x_a + x_b = x_c = 1$ kg groß.

Laut dem Mischungskreuz gilt für die Anteile der Legierungen mit 20- und 40-prozentigem Chromanteil an der Legierung mit 25-prozentigem Chromanteil:

20%		$40-25 = 15$ 20%-Anteile
	25%	
40%		$25-20 = 5$ 40%-Anteile

Mit $x_a + x_b = 1 \Leftrightarrow x_b = 1 - x_a$ folgt:

$$x_a/x_b = x_a/(1-x_a) = (40-25)/(25-20) = 15/5 = 3 \Leftrightarrow x_a/(1-x_a) = 3 \Leftrightarrow x_a = 3 \cdot (1-x_a) \Leftrightarrow x_a = 3 - 3x_a \Leftrightarrow 4x_a = 3 \Leftrightarrow x_a = 3/4 = 0,75 \text{ kg} \rightarrow x_b = 1 - 0,75 = 0,25 \text{ kg}.$$

0,75 kg der Chrom-Nickel-Legierung mit 20 Prozent Chromanteil und 0,25 kg der Legierung mit 40 Prozent Chromanteil ergeben also 1 kg Legierung mit 25 Prozent Chromanteil.

2. Lösung: Mit x_a als Menge der Chrom-Nickel-Legierung mit 20-prozentigem Chromanteil (Verhältnis 1 zu 4 bei insgesamt 5 Anteilen), x_b als Menge der Chrom-Nickel-Legierung mit 40 Prozent Chromanteil. und $x_a + x_b = x_c = 1$ kg als Menge der durch Mischung entstehenden Legierung mit 25 Prozent Chromanteil ergibt sich mit den Prozentanteilen $a = 20\% = 0,2$, $b = 40\% = 0,4$ und $c = 25\% = 0,25$ das lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$x_a + x_b = 1 \text{ (Mengen der Legierungen) (1)}$$

$$0,2 \cdot x_a + 0,4 \cdot x_b = 0,25 \cdot 1 = 0,25 \text{ (Chromanteile) (2).}$$

Gleichung (1) führt auf:

$$x_a + x_b = 1 \Leftrightarrow x_b = 1 - x_a \text{ (1a)}$$

Gleichung (2) auf:

$$0,2 \cdot x_a + 0,4 \cdot x_b = 0,25 \Leftrightarrow 0,4 \cdot x_b = 0,25 - 0,2 \cdot x_a \Leftrightarrow x_b = 0,625 - 0,5 \cdot x_a \text{ (2a).}$$

Gleichsetzen der x_b in den Gleichungen (1a) und (2a) ergibt:

$$1 - x_a = 0,625 - 0,5 \cdot x_a \Leftrightarrow 0,375 - x_a = -0,5 \cdot x_a \Leftrightarrow 0,375 = 0,5 \cdot x_a \Leftrightarrow x_a = 0,75 \text{ kg} \rightarrow x_b = 1 - 0,75 = 0,25 \text{ kg}.$$

0,75 kg der Chrom-Nickel-Legierung mit 20 Prozent Chromanteil und 0,25 kg der Legierung mit 40 Prozent Chromanteil ergeben also 1 kg Legierung mit 25 Prozent Chromanteil.

www.michael-buhlmann.de / 10.2026 / Aufgabe 2659