

Mathematikaufgaben

> Algebra

> Lineare Gleichungssysteme/Mischungen

Aufgabe: Die Kunigundenglocke ist mit ihren 3,45 Tonnen Gewicht und einem maximalen Durchmesser von fast 1,6 Metern die zweitgrößte Glocke im Bamberger unter Bischof Ekbert von Andechs (1203-1237) 1237 vollendeten und geweihten Dom, einem Neubau, der an die Stelle des 1185 durch Brand zerstörten auf König Heinrich II. (1002-1024) zurückgehenden, 1012 geweihten Kirchenbau des damals neu entstandenen Bistums Bamberg trat. König/Kaiser Heinrich wurde im Übrigen im Jahr 1146 heilig gesprochen, seine Ehefrau Kunigunde (†1033) im Jahr 1200. Nach ihr ist die zwischen 1185 und 1237 hergestellte Kunigundenglocke benannt.

Im Mittelalter wurden Glocken aus Zinnbronze gegossen, einer Legierung meist aus 76 bis 80 Prozent Kupfer und 20 bis 24 Prozent Zinn. Wir können uns nun vorstellen, dass Überreste der Glocken des 1185 zerstörten Kirchenbaus zum Bronzeguss der Kunigundenglocke Verwendung fanden. Dabei sollen zwei Arten von Bronze zusammen mit reinem Kupfer Verwendung gefunden haben:

Bronze I: 70 Prozent Kupfer, 30 Prozent Zinn

Bronze II: 80 Prozent Kupfer, 20 Prozent Zinn

Reines Kupfer: 100 Prozent Kupfer.

Die zur Verfügung stehende Menge an Bronze I betrug dabei 2130 kg, die an Bronze II 1360 kg. Reines Kupfer konnte unbegrenzt zugekauft werden. Die Kunigundenglocke selbst ist eine Legierung von 78 Prozent Kupfer und 22 Prozent Zinn.

Welche Mengen der Grundsubstanzen Bronze I, Bronze II, Kupfer wurden dann bei der Herstellung der Kunigundenglocke verwendet?

Lösung: I. Ein (allgemeines) lineares Gleichungssystem bestehe aus m Gleichungen (durchnummeriert von 1 bis m) und n Unbekannten und habe die Form:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$

$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad (m)$$

mit den reellen Variablen $x_1, \dots, x_n$, den reellen Koeffizienten $a_{11}, \dots, a_{mn}$ und reellen Ergebnissen (rechten Seiten) $b_1, \dots, b_m$. Sind alle Zahlen $b_1, \dots, b_m = 0$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, ansonsten inhomogen. Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen ($n > m$) heißt unterbestimmt, eins mit mehr Gleichungen als Variablen ($n < m$) überbestimmt. In abgekürzter tabellarischer Darstellung (Matrixdarstellung) lautet das lineare Gleichungssystem in der Form der durch die rechte Seite erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Allgemein gilt nun für das Lösen von linearen Gleichungssystemen die folgende Vorgehensweise

gemäß dem sog. Gaußschen Algorithmus:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable x_n der letzten Spalte mit dem dazugehörigen Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $ax_n = b \Leftrightarrow x_n = b/a$. / Für die Variable x_{n-1} der vorletzten Spalte mit dem dazugehörigen Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cx_{n-1} + dx_n = e \Leftrightarrow cx_{n-1} = e - db/a \Leftrightarrow x_{n-1} = (e - db/a)/c = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: $L = \{(l|m|...|t)\}$ mit reellen Zahlen l, m, ... t.

Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite (meist in der letzten Zeile) eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f \neq 0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält in einer gewissen Zeile k ($1 \leq k \leq n$) (meist in der letzten Zeile) im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ebenfalls ein Element = 0 enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable x_k , deren Diagonalelement = 0 ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ $L = \{(l(r)|m(r)|...|t(r)) \mid r \in \mathbb{R}\}$ mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1 r + l_2$, $m(r) = m_1 r + m_2$, ..., $t(r) = t_1 r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, ... zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, ...

II. Es liegt eine Mischungsaufgabe vor. Dabei seien: x = Menge der Bronze I, y = Menge der Bronze II, z = Menge an Kupfer für den Guss der Kunigundenglocke. Alle Mengen zusammen müssen 3,45 Tonnen = 3450 Kilogramm (kg) ergeben, d.h., es gilt:

$$x + y + z = 3450 \quad (1).$$

Der Kupferanteil in der Legierung der Kunigundenglocke beträgt 78 Prozent, was $0,78 \cdot 3450 = 2691$ kg entspricht. Die Kupferanteile der Bronze I, Bronze II und von Kupfer betragen 70 Prozent = 0,7, 80 Prozent = 0,8 und 100 Prozent = 1, so dass die Gleichung

$$0,7x + 0,8y + z = 2691 \quad (2)$$

folgt. Hinsichtlich des Zinnanteils in der Legierung der Kunigundenglocke gilt ein Anteil von 22 Prozent bei einem Gewicht an Zinn von $0,22 \cdot 3450 = 759$ kg. Es ergibt sich die Gleichung:

$$0,3x + 0,2y = 759 \quad (3).$$

Erkennbar ist sofort, dass die Summe der Gleichungen (2) und (3) die Gleichung (1) ist. Es liegt damit ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten vor. Wir lösen das Gleichungssystem (z.B.) mit den Gleichungen (1) und (2):

$$x + y + z = 3450$$

$$0,7x + 0,8y + z = 2691 \quad | \cdot 10$$

$$x + y + z = 3450$$

$$7x + 8y + 10z = 26910$$

und verwenden dazu den Gaußschen Algorithmus:

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 1x + 1y + 1z = 3450$$

$$+ 7x + 8y + 10z = 26910$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & R.S. \\ 1 & 1 & 1 & 3450 \\ 7 & 8 & 10 & 26910 \end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) - 7 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3450 \\ 0 & 1 & 3 & 2760 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} + 1x + 1y + 1z = 3450 \\ \quad + 1y + 3z = 2760 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} z = y \\ y = 2760 - 3y \\ x = 690 + 2y \text{ mit reellem Parameter } y. \end{array}$$

III. Die Interpretation der Lösungen des linearen Gleichungssystems lässt dann das Nachstehende erkennen: $z = y$ ist die Menge an zugekauftem Kupfer mit $y \geq 0$; $y = 2760 - 3y$ ist der Anteil der zum Glockenguss zu verwendenden Bronze I, wobei wegen der maximalen Menge von 2130 kg gilt: $0 \leq 2760 - 3y \leq 2130$; hinsichtlich der Menge $x = 690 + 2y$ an Bronze II ergibt sich wegen der Beschränkung auf 1360 kg: $690 \leq 690 + 2y \leq 1360$ bei nichtnegativem y . Zusammengefasst gilt:

$$\begin{array}{l} 0 \leq y \text{ (I)} \\ 0 \leq 2760 - 3y \leq 2130 \text{ (II)} \\ 690 \leq 690 + 2y \leq 1360 \text{ (III)}. \end{array}$$

Mit $y \geq 0$ (I) folgt aus (II):

$$2760 - 3y \leq 2130 \Leftrightarrow -3y \leq -630 \Leftrightarrow y \geq 210,$$

aus (III):

$$690 + 2y \leq 1360 \Leftrightarrow 2y \leq 670 \Leftrightarrow y \leq 335.$$

Der reine Kupferanteil, der dem Glockenguss zugesetzt werden muss, liegt also zwischen $y=210$ und $y=335$ kg. Wegen des Zukaufs des Kupfers soll die Menge an Kupfer minimal $z = y = 210$ kg sein. Daraus ergeben sich für die Anteile an Bronze I und Bronze II: $y = 2760 - 3 \cdot 210 = 2130$ kg, $x = 690 + 2 \cdot 210 = 1110$ kg. Alle Mengen zusammengenommen sind: $x+y+z = 1110+2130+210 = 3450$ kg als Gewicht der Kunigundenglocke. Der Kupferanteil beträgt wegen: $0,7x+0,8y+z = 777+1704+210 = 2691$ kg 78 Prozent, der Zinnanteil wegen: $3450-2691 = 759$ kg 22 Prozent.

IV. Der Guss der Bamberger Kunigundenglocke erforderte also die Verwendung folgender Mengen(anteile):

Bronze I (70 Prozent Kupfer, 30 Prozent Zinn): 1110 kg

Bronze II (80 Prozent Kupfer, 20 Prozent Zinn): 2130 kg

Reines Kupfer (100 Prozent Kupfer): 210 kg

Kunigundenglocke (78 Prozent Kupfer, 22 Prozent Zinn): 3450 kg.

V. Zur Kaiserin Kunigunde (*ca.975/85-†1033) vergleiche noch das Folgende: Kunigunde war die Tochter des Grafen Siegfried im Mosel- und Saargau und wohl seit dem Jahr 1000 Ehefrau des bayerischen Herzogs Heinrich IV. (995-1004), des Sohns Heinrichs des Zänkers. An der Seite ihres Manns, der sich nach dem frühen Tod Kaiser Ottos III. (983-1002) als König (1002-1024) durchsetzte, wurde Kunigunde – aufgrund ihrer Paderborner Krönung (1002) – zur Königin. Der durchaus tyrannische, wohl impotente Herrscher gründete „sein“ Bistum Bamberg (1007) und bekämpfte in der Moselfehde die Brüder seiner Frau (1008-1015). 1014 wurde Kunigunde in Rom zur Kaiserin gekrönt, 1024 – nach dem Tod Heinrichs II. – füllte sie ihre bedeutende politische Rolle beim Übergang der Königsherrschaft auf den Salier Konrad II. (1024-1039) aus. Dieser machte allerdings die von Kunigunde verfügten Schenkungen an bayerische Kirchen rückgängig (1024/25), worauf sich die Kaiserin in das von ihr gestiftete Kloster Kaufungen zurückzog und dort als Nonne im Jahr 1033 starb.