Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Operations Research
> Lineare Optimierung

Aufgabe: Gegeben sind die folgenden linearen Optimierungsprobleme:

A:

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+6x_1 + 4x_2 \leq 600$

2. Restriktion: $+4x_1 + 8x_2 \leq 800$

3. Restriktion: $+5x_2 \leq 400$

Zielfunktion: $+2x_1 + 3x_2 =$ z -> Maximum

B:

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+6x_1 + 4x_2 \leq 600$

2. Restriktion: $+4x_1 + 8x_2 \leq 800$

3. Restriktion: $+5x_2 \leq 400$

Zielfunktion: $+2x_1 + 4x_2 =$ z -> Maximum

Lösung: I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen x_1, x_2 … besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten x_1, x_2 … (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion $z = z(x_1,x_2,\dots)$. Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im Zweidimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.
Für die zwei oben stehenden Optimierungsprobleme ist der Zulässigkeitsbereich derselbe. Die zu maximierenden unterschiedlichen Zielfunktionen führen dann zu verschiedenen Optimallösungen.

II. Wir verwenden für das Optimierungsproblem A das <u>Simplexverfahren</u> wie folgt:

(Zweidimensionales) <u>lineares Optimierungsproblem</u>: 2 Variablen, 2 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+6x_1 + 4x_2 \leq 600$

2. Restriktion: $+4x_1 + 8x_2 \leq 800$

3. Restriktion: $+5x_2 \leq 400$

Zielfunktion: $+2x_1 + 3x_2 =$ z -> Maximum

<u>Einführung von Schlupfvariablen</u>: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+6x_1 + 4x_2 + 1u_1 = 600$

2. Restriktion: $+4x_1 + 8x_2 + 1u_2 = 800$

3. Restriktion: $+5x_2 + 1u_3 = 400$

Zielfunktion: $+2x_1 + 3x_2 =$ z -> Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	6	4	1	0	0	600	0
2. Restriktion:	4	8	0	1	0	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	2	3	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 600$, $u_2 = 800$, $u_3 = 400$, $z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 2: 5*(*1*) - 4*(*3*) / 5*(*2*) - 8*(*3*) / 5*(*Z*) - 3*(*3*) /

	x_1	$*x_2$	$*u_1$	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	30	0	5	0	-4	1400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	10	0	0	0	-3	-1200	5

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 80$, $u_1 = 280$, $u_2 = 160$, $u_3 = 0$, $z = 240$

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 1: 2*(*1*) - 3*(*2*) / 2*(*Z*) - 1*(*2*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	10	-15	16	400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	0	0	0	-5	2	-3200	10

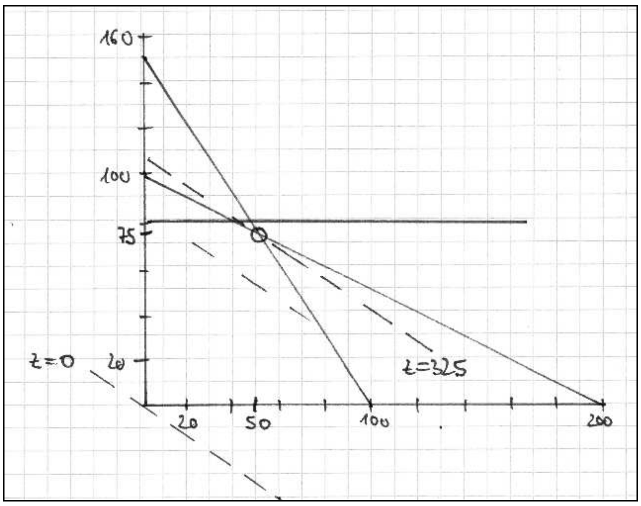
Ecke: $x_1 = 40$, $x_2 = 80$, $u_1 = 40$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $z = 320$

3. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 3: 2*(*2*) + 1*(*1*) / 16*(*3*) - 1*(*1*) / 8*(*Z*) - 1*(*1*) /

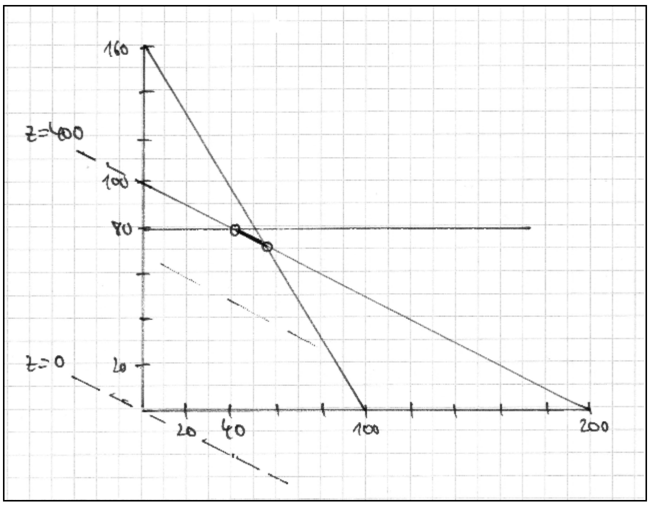
	$*x_1$	$*x_2$	u_1	u_2	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	0	0	10	-15	16	400	0
2. Restriktion:	40	0	10	-5	0	2000	0
3. Restriktion:	0	80	-10	15	0	6000	0
Zielfunktion:	0	0	-10	-25	0	-26000	80

Ecke: $x_1 = 50$, $x_2 = 75$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 25$, $z = 325$

Optimale Ecke: $x_1 = 50$, $x_2 = 75$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 25$, $z = 325$



Optimierungsproblem A



Optimierungsproblem B

III. Wir verwenden für das Optimierungsproblem B das Simplexverfahren wie folgt:

(Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 6x_1 + 4x_2 \leq 600$

2. Restriktion: $+ 4x_1 + 8x_2 \leq 800$

3. Restriktion: $+ 5x_2 \leq 400$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 4x_2 = z$ -> Maximum

<u>Einführung von Schlupfvariablen</u>: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 6x_1 + 4x_2 + 1u_1 = 600$

2. Restriktion: $+ 4x_1 + 8x_2 + 1u_2 = 800$

3. Restriktion: $+ 5x_2 + 1u_3 = 400$

Zielfunktion: $+ 2x_1 + 4x_2 = z$ -> Maximum

<u>Anfangstableau</u>: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	6	4	1	0	0	600	0
2. Restriktion:	4	8	0	1	0	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	2	4	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 600$, $u_2 = 800$, $u_3 = 400$, z = 0

<u>1. Schritt</u>: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 2: 5*(*1*) - 4*(*3*) / 5*(*2*) - 8*(*3*) / 5*(*Z*) - 4*(*3*) /

	x_1	$*x_2$	$*u_1$	$*u_2$	u_3	b	z
1. Restriktion:	30	0	5	0	-4	1400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	10	0	0	0	-4	-1600	5

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 80$, $u_1 = 280$, $u_2 = 160$, $u_3 = 0$, z = 320

<u>2. Schritt</u>: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 1: 2*(*1*) - 3*(*2*) / 2*(*Z*) - 1*(*2*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	b	z
1. Restriktion:	0	0	10	-15	16	400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	0	0	0	-5	0	-4000	10

Ecke: $x_1 = 40$, $x_2 = 80$, $u_1 = 40$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 400

<u>Optimale Ecke</u> (als Teil einer mehrdeutigen Lösung): $x_1 = 40$, $x_2 = 80$, $u_1 = 40$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, z = 400

www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 132