

# Mathematikaufgaben

## > Operations Research

## > Lineare Optimierung

---

**Aufgabe:** Gegeben sind die folgenden linearen Optimierungsprobleme:

A:

$$\begin{aligned} \text{Nichtnegativität: } & x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ 1. \text{ Restriktion: } & + 6x_1 + 4x_2 \leq 600 \\ 2. \text{ Restriktion: } & + 4x_1 + 8x_2 \leq 800 \\ 3. \text{ Restriktion: } & \quad \quad + 5x_2 \leq 400 \\ \text{Zielfunktion: } & + 2x_1 + 3x_2 = \quad z \rightarrow \text{Maximum} \end{aligned}$$

B:

$$\begin{aligned} \text{Nichtnegativität: } & x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ 1. \text{ Restriktion: } & + 6x_1 + 4x_2 \leq 600 \\ 2. \text{ Restriktion: } & + 4x_1 + 8x_2 \leq 800 \\ 3. \text{ Restriktion: } & \quad \quad + 5x_2 \leq 400 \\ \text{Zielfunktion: } & + 2x_1 + 4x_2 = \quad z \rightarrow \text{Maximum} \end{aligned}$$

**Lösung:** I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen  $x_1, x_2 \dots$  besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten  $x_1, x_2 \dots$  (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion  $z = z(x_1, x_2, \dots)$ . Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im Zweidimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.

Für die zwei oben stehenden Optimierungsprobleme ist der Zulässigkeitsbereich derselbe. Die zu maximierenden unterschiedlichen Zielfunktionen führen dann zu verschiedenen Optimallösungen.

II. Wir verwenden für das Optimierungsproblem A das Simplexverfahren wie folgt:

(Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 2 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

$$\begin{aligned} \text{Nichtnegativität: } & x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ 1. \text{ Restriktion: } & + 6x_1 + 4x_2 \leq 600 \\ 2. \text{ Restriktion: } & + 4x_1 + 8x_2 \leq 800 \\ 3. \text{ Restriktion: } & \quad \quad + 5x_2 \leq 400 \\ \text{Zielfunktion: } & + 2x_1 + 3x_2 = \quad z \rightarrow \text{Maximum} \end{aligned}$$

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

$$\begin{aligned} \text{Nichtnegativität: } & x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ & \quad \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0 \\ 1. \text{ Restriktion: } & + 6x_1 + 4x_2 + 1u_1 \quad \quad \quad = 600 \\ 2. \text{ Restriktion: } & + 4x_1 + 8x_2 \quad + \quad 1u_2 \quad \quad \quad = 800 \\ 3. \text{ Restriktion: } & \quad \quad + 5x_2 \quad \quad \quad + \quad 1u_3 = 400 \\ \text{Zielfunktion: } & + 2x_1 + 3x_2 = \quad z \rightarrow \text{Maximum} \end{aligned}$$

Anfangstableau: \* = Basisvariable

	$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$b$	$z$
1. Restriktion:	6	4	1	0	0	600	0
2. Restriktion:	4	8	0	1	0	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	2	3	0	0	0	0	1

Ecke:  $x_1 = 0, x_2 = 0, u_1 = 600, u_2 = 800, u_3 = 400, z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 2:  $5 \cdot (1) - 4 \cdot (3) / 5 \cdot (2) - 8 \cdot (3) / 5 \cdot (Z) - 3 \cdot (3) /$

	$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$b$	$z$
1. Restriktion:	30	0	5	0	-4	1400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	10	0	0	0	-3	-1200	5

Ecke:  $x_1 = 0, x_2 = 80, u_1 = 280, u_2 = 160, u_3 = 0, z = 240$

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 1:  $2 \cdot (1) - 3 \cdot (2) / 2 \cdot (Z) - 1 \cdot (2) /$

	$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$b$	$z$
1. Restriktion:	0	0	10	-15	16	400	0
2. Restriktion:	20	0	0	5	-8	800	0
3. Restriktion:	0	5	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	0	0	0	-5	2	-3200	10

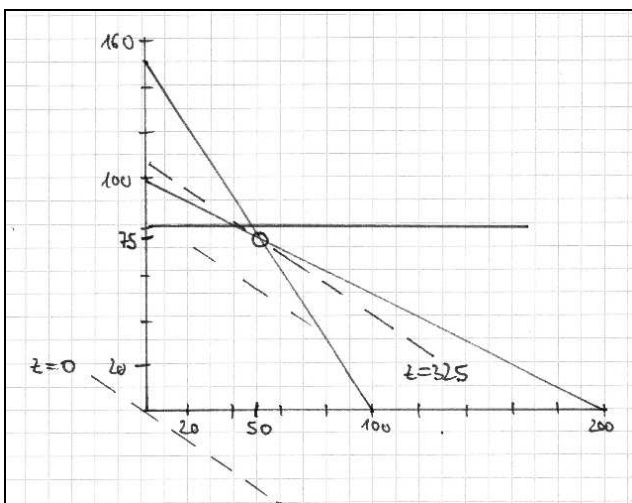
Ecke:  $x_1 = 40, x_2 = 80, u_1 = 40, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 320$

3. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 3:  $2 \cdot (2) + 1 \cdot (1) / 16 \cdot (3) - 1 \cdot (1) / 8 \cdot (Z) - 1 \cdot (1) /$

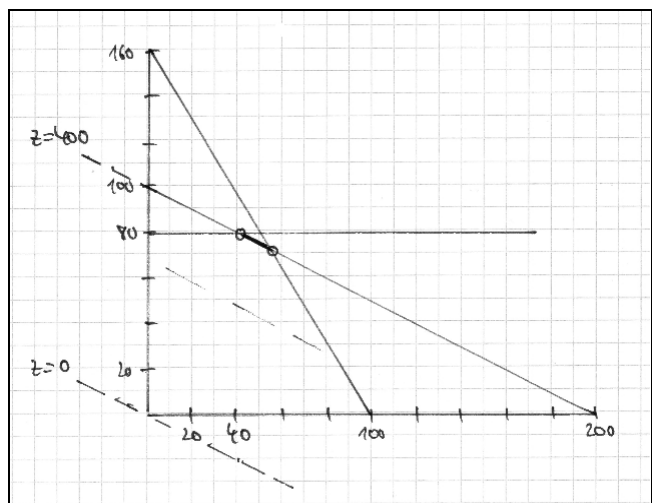
	$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$b$	$z$
1. Restriktion:	0	0	10	-15	16	400	0
2. Restriktion:	40	0	10	-5	0	2000	0
3. Restriktion:	0	80	-10	15	0	6000	0
Zielfunktion:	0	0	-10	-25	0	-26000	80

Ecke:  $x_1 = 50, x_2 = 75, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 25, z = 325$

Optimale Ecke:  $x_1 = 50, x_2 = 75, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 25, z = 325$



Optimierungsproblem A



Optimierungsproblem B

III. Wir verwenden für das Optimierungsproblem B das Simplexverfahren wie folgt:

(Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität:  $x_1, x_2 \geq 0$   
 1. Restriktion:  $+ 6x_1 + 4x_2 \leq 600$   
 2. Restriktion:  $+ 4x_1 + 8x_2 \leq 800$   
 3. Restriktion:  $+ 5x_2 \leq 400$   
 Zielfunktion:  $+ 2x_1 + 4x_2 = z \rightarrow$  Maximum

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität:  $x_1, x_2 \geq 0$   
 $u_1, u_2, u_3 \geq 0$   
 1. Restriktion:  $+ 6x_1 + 4x_2 + 1u_1 = 600$   
 2. Restriktion:  $+ 4x_1 + 8x_2 + 1u_2 = 800$   
 3. Restriktion:  $+ 5x_2 + 1u_3 = 400$   
 Zielfunktion:  $+ 2x_1 + 4x_2 = z \rightarrow$  Maximum

Anfangstableau: \* = Basisvariable

$x_1 \ x_2 \ *u_1 \ *u_2 \ *u_3 \ | \ b \ z$   
 1. Restriktion: 6 4 1 0 0 | 600 0  
 2. Restriktion: 4 8 0 1 0 | 800 0  
 3. Restriktion: 0 5 0 0 1 | 400 0  
 Zielfunktion: 2 4 0 0 0 | 0 1

Ecke:  $x_1 = 0, x_2 = 0, u_1 = 600, u_2 = 800, u_3 = 400, z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 2:  $5^*(1) - 4^*(3) / 5^*(2) - 8^*(3) / 5^*(Z) - 4^*(3) /$

$x_1 \ *x_2 \ *u_1 \ *u_2 \ u_3 \ | \ b \ z$   
 1. Restriktion: 30 0 5 0 -4 | 1400 0  
 2. Restriktion: 20 0 0 5 -8 | 800 0  
 3. Restriktion: 0 5 0 0 1 | 400 0  
 Zielfunktion: 10 0 0 0 -4 | -1600 5

Ecke:  $x_1 = 0, x_2 = 80, u_1 = 280, u_2 = 160, u_3 = 0, z = 320$

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 1:  $2^*(1) - 3^*(2) / 2^*(Z) - 1^*(2) /$

$*x_1 \ *x_2 \ *u_1 \ u_2 \ u_3 \ | \ b \ z$   
 1. Restriktion: 0 0 10 -15 16 | 400 0  
 2. Restriktion: 20 0 0 5 -8 | 800 0  
 3. Restriktion: 0 5 0 0 1 | 400 0  
 Zielfunktion: 0 0 0 -5 0 | -4000 10

Ecke:  $x_1 = 40, x_2 = 80, u_1 = 40, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 400$

Optimale Ecke (als Teil einer mehrdeutigen Lösung):  $x_1 = 40, x_2 = 80, u_1 = 40, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 400$