

# Mathematikaufgaben

## > Operations Research

### > Lineare Optimierung

---

**Aufgabe:** Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Nichtnegativität:} & \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ 1. \text{ Restriktion:} & \quad + 1x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ 2. \text{ Restriktion:} & \quad + 2x_1 + 2x_2 \leq 500 \\ 3. \text{ Restriktion:} & \quad + 2x_1 + 1x_2 \leq 400 \\ \text{Zielfunktion:} & \quad + 320x_1 + 320x_2 = z \rightarrow \text{Maximum} \end{aligned}$$

**Lösung:** I. Voruberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen  $x_1, x_2 \dots$  besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten  $x_1, x_2 \dots$  (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion  $z = z(x_1, x_2, \dots)$ . Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im Zweidimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.

II. Wir verwenden das Simplexverfahren wie folgt:

(Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

$$\begin{aligned} \text{Nichtnegativität:} & \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ 1. \text{ Restriktion:} & \quad + 1x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ 2. \text{ Restriktion:} & \quad + 2x_1 + 2x_2 \leq 500 \\ 3. \text{ Restriktion:} & \quad + 2x_1 + 1x_2 \leq 400 \\ \text{Zielfunktion:} & \quad + 320x_1 + 320x_2 = z \rightarrow \text{Maximum} \end{aligned}$$

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

$$\begin{aligned} \text{Nichtnegativität:} & \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ & \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0 \\ 1. \text{ Restriktion:} & \quad + 1x_1 + 2x_2 + 1u_1 = 400 \\ 2. \text{ Restriktion:} & \quad + 2x_1 + 2x_2 + 1u_2 = 500 \\ 3. \text{ Restriktion:} & \quad + 2x_1 + 1x_2 + 1u_3 = 400 \\ \text{Zielfunktion:} & \quad + 320x_1 + 320x_2 = z \rightarrow \text{Maximum} \end{aligned}$$

Anfangstableau: \* = Basisvariable

$$\begin{aligned} & \quad x_1 \quad x_2 \quad *u_1 \quad *u_2 \quad *u_3 \mid b \quad z \\ 1. \text{ Restriktion:} & \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \mid 400 \quad 0 \\ 2. \text{ Restriktion:} & \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \mid 500 \quad 0 \\ 3. \text{ Restriktion:} & \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \mid 400 \quad 0 \\ \text{Zielfunktion:} & \quad 320 \quad 320 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 1 \end{aligned}$$

Ecke:  $x_1 = 0, x_2 = 0, u_1 = 400, u_2 = 500, u_3 = 400, z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1:  $2 \cdot (1) - 1 \cdot (3) / 1 \cdot (2) - 1 \cdot (3) / 1 \cdot (Z) - 160 \cdot (3) /$

	$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$b$	$z$
1. Restriktion:	0	3	2	0	-1	400	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	-1	100	0
3. Restriktion:	2	1	0	0	1	400	0
Zielfunktion:	0	160	0	0	-160	-64000	1

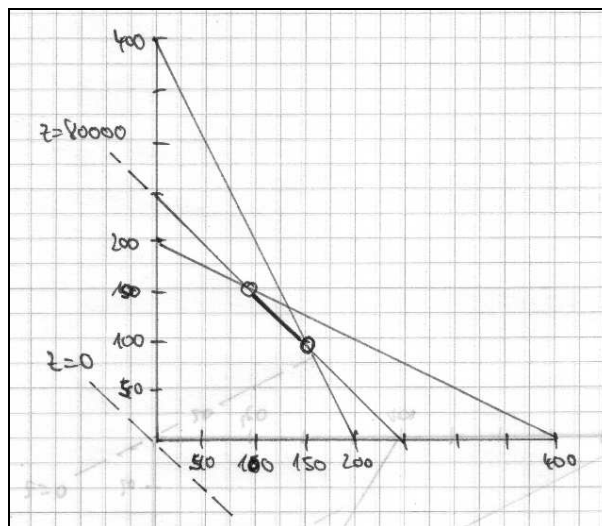
Ecke:  $x_1 = 200, x_2 = 0, u_1 = 200, u_2 = 100, u_3 = 0, z = 64000$

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2:  $1 \cdot (1) - 3 \cdot (2) / 1 \cdot (3) - 1 \cdot (2) / 1 \cdot (Z) - 160 \cdot (2) /$

	$x_1$	$x_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$b$	$z$
1. Restriktion:	0	0	2	-3	2	100	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	-1	100	0
3. Restriktion:	2	0	0	-1	2	300	0
Zielfunktion:	0	0	0	-160	0	-80000	1

Ecke:  $x_1 = 150, x_2 = 100, u_1 = 50, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 80000$

Optimale Ecke (als Teil einer mehrdeutigen Lösung):  $x_1 = 150, x_2 = 100, u_1 = 50, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 80000$



www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 133