Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Operations Research
> Lineare Optimierung

Aufgabe: Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 \leq 30$

2. Restriktion: $+ 1x_2 \leq 15$

3. Restriktion: $+ 1x_1 + 2x_2 \leq 40$

Zielfunktion: $+ 12x_1 + 18x_2 = z$ -> Maximum

Lösung: I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen x_1, x_2 … besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten x_1, x_2 … (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion $z = z(x_1,x_2,…)$. Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im Zweidimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.

II. Wir verwenden das <u>Simplexverfahren</u> wie folgt:

(Zweidimensionales) <u>lineares Optimierungsproblem</u>: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 \leq 30$

2. Restriktion: $+ 1x_2 \leq 15$

3. Restriktion: $+ 1x_1 + 2x_2 \leq 40$

Zielfunktion: $+ 12x_1 + 18x_2 = z$ -> Maximum

<u>Einführung von Schlupfvariablen</u>: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_1 + 1x_2 + 1u_1 = 30$

2. Restriktion: $+ 1x_2 + 1u_2 = 15$

3. Restriktion: $+ 1x_1 + 2x_2 + 1u_3 = 40$

Zielfunktion: $+ 12x_1 + 18x_2 = z$ -> Maximum

<u>Anfangstableau</u>: * = Basisvariable

	x_1	x_2	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	|	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	0	0	|	30	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	|	15	0
3. Restriktion:	1	2	0	0	1	|	40	0
Zielfunktion:	12	18	0	0	0	|	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $u_1 = 30$, $u_2 = 15$, $u_3 = 40$, $z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 1*(*1*) - 1*(*2*) / 1*(*3*) - 2*(*2*) / 1*(*Z*) - 18*(*2*) /

	x_1	$*x_2$	$*u_1$	u_2	$*u_3$	|	b	z
1. Restriktion:	1	0	1	-1	0	|	15	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	|	15	0
3. Restriktion:	1	0	0	-2	1	|	10	0
Zielfunktion:	12	0	0	-18	0	|	-270	1

Ecke: x_1 = 0, x_2 = 15, u_1 = 15, u_2 = 0, u_3 = 10, z = 270

2. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: 1*(*1*) - 1*(*3*) / 1*(*Z*) - 12*(*3*) /

	$*x_1$	$*x_2$	$*u_1$	u_2	u_3	|	b	z
1. Restriktion:	0	0	1	1	-1	|	5	0
2. Restriktion:	0	1	0	1	0	|	15	0
3. Restriktion:	1	0	0	-2	1	|	10	0
Zielfunktion:	0	0	0	6	-12	|	-390	1

Ecke: x_1 = 10, x_2 = 15, u_1 = 5, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 390

3. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) + 2*(*1*) / 1*(*Z*) - 6*(*1*) /

	$*x_1$	$*x_2$	u_1	$*u_2$	u_3	|	b	z
1. Restriktion:	0	0	1	1	-1	|	5	0
2. Restriktion:	0	1	-1	0	1	|	10	0
3. Restriktion:	1	0	2	0	-1	|	20	0
Zielfunktion:	0	0	-6	0	-6	|	-420	1

Ecke: x_1 = 20, x_2 = 10, u_1 = 0, u_2 = 5, u_3 = 0, z = 420

Optimale Ecke: x_1 = 20, x_2 = 10, u_1 = 0, u_2 = 5, u_3 = 0, z = 420

www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 135