

Mathematikaufgaben

> Operations Research

> Lineare Optimierung

Aufgabe: Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

Nichtnegativität: $x_1, x_2 \geq 0$
1. *Restriktion:* $+ 2x_1 + 10x_2 \leq 70$
2. *Restriktion:* $+ 6x_1 + 6x_2 \leq 66$
3. *Restriktion:* $+ 10x_1 + 5x_2 \leq 90$
Zielfunktion: $+ 15x_1 + 10x_2 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Lösung: I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen $x_1, x_2 \dots$ besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten $x_1, x_2 \dots$ (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion $z = z(x_1, x_2, \dots)$. Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im Zweidimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.

II. Wir verwenden das Simplexverfahren wie folgt:

(Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, x_2 \geq 0$
1. *Restriktion:* $+ 2x_1 + 10x_2 \leq 70$
2. *Restriktion:* $+ 6x_1 + 6x_2 \leq 66$
3. *Restriktion:* $+ 10x_1 + 5x_2 \leq 90$
Zielfunktion: $+ 15x_1 + 10x_2 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, x_2 \geq 0$
 $u_1, u_2, u_3 \geq 0$
1. *Restriktion:* $+ 2x_1 + 10x_2 + 1u_1 = 70$
2. *Restriktion:* $+ 6x_1 + 6x_2 + 1u_2 = 66$
3. *Restriktion:* $+ 10x_1 + 5x_2 + 1u_3 = 90$
Zielfunktion: $+ 15x_1 + 10x_2 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_1	x_2	* u_1	* u_2	* u_3		b	z
1. <i>Restriktion:</i>	2	10	1	0	0		70	0
2. <i>Restriktion:</i>	6	6	0	1	0		66	0
3. <i>Restriktion:</i>	10	5	0	0	1		90	0
<i>Zielfunktion:</i>	15	10	0	0	0		0	1

Ecke: $x_1 = 0, x_2 = 0, u_1 = 70, u_2 = 66, u_3 = 90, z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1: $5 \cdot (1) - 1 \cdot (3) / 5 \cdot (2) - 3 \cdot (3) / 2 \cdot (Z) - 3 \cdot (3) /$

$x_1 \ x_2 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ | \ b \ z$

1. Restriktion: 0 45 5 0 -1 | 260 0

2. Restriktion: 0 15 0 5 -3 | 60 0

3. Restriktion: 10 5 0 0 1 | 90 0

Zielfunktion: 0 5 0 0 -3 | -270 2

Ecke: $x_1 = 9, x_2 = 0, u_1 = 52, u_2 = 12, u_3 = 0, z = 135$

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: $1 \cdot (1) - 3 \cdot (2) / 3 \cdot (3) - 1 \cdot (2) / 3 \cdot (Z) - 1 \cdot (2) /$

$x_1 \ x_2 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ | \ b \ z$

1. Restriktion: 0 0 5 -15 8 | 80 0

2. Restriktion: 0 15 0 5 -3 | 60 0

3. Restriktion: 30 0 0 -5 6 | 210 0

Zielfunktion: 0 0 0 -5 -6 | -870 6

Ecke: $x_1 = 7, x_2 = 4, u_1 = 16, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 145$

Optimale Ecke: $x_1 = 7, x_2 = 4, u_1 = 16, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 145$

www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 136