

Mathematikaufgaben

> Operations Research

> Lineare Optimierung

Aufgabe: Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

Nichtnegativität: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
1. *Restriktion:* $+ 1x_1 \leq 50$
2. *Restriktion:* $+ 1x_2 \leq 80$
3. *Restriktion:* $+ 1x_3 \leq 40$
Zielfunktion: $+ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Lösung: I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen $x_1, x_2 \dots$ besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten $x_1, x_2 \dots$ (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion $z = z(x_1, x_2, \dots)$. Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich mit seinen Eckpunkten, auf. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.

II. Wir verwenden das Simplexverfahren wie folgt:

(Dreidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 3 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
1. *Restriktion:* $+ 1x_1 \leq 50$
2. *Restriktion:* $+ 1x_2 \leq 80$
3. *Restriktion:* $+ 1x_3 \leq 40$
Zielfunktion: $+ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Anfangstableau: 3 Schlupfvariable(n), * = Basisvariable

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	z
1. <i>Restriktion:</i>	1	0	0	1	0	0	50	0
2. <i>Restriktion:</i>	0	1	0	0	1	0	80	0
3. <i>Restriktion:</i>	0	0	1	0	0	1	40	0
<i>Zielfunktion:</i>	3	2	1	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, u_1 = 50, u_2 = 80, u_3 = 40, z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: $1*(Z) - 3*(1) /$

	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	b	z
1. <i>Restriktion:</i>	1	0	0	1	0	0	50	0
2. <i>Restriktion:</i>	0	1	0	0	1	0	80	0
3. <i>Restriktion:</i>	0	0	1	0	0	1	40	0
<i>Zielfunktion:</i>	0	2	1	-3	0	0	-150	1

Ecke: $x_1 = 50, x_2 = 0, x_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 80, u_3 = 40, z = 150$

2. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: $1 \cdot (Z) - 2 \cdot (2) /$

$*x_1 \quad *x_2 \quad x_3 \quad u_1 \quad u_2 \quad *u_3 \mid b \quad z$

1. Restriktion: 1 0 0 1 0 0 | 50 0

2. Restriktion: 0 1 0 0 1 0 | 80 0

3. Restriktion: 0 0 1 0 0 1 | 40 0

Zielfunktion: 0 0 1 -3 -2 0 | -310 1

Ecke: $x_1 = 50, x_2 = 80, x_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 40, z = 310$

3. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 3: $1 \cdot (Z) - 1 \cdot (3) /$

$*x_1 \quad *x_2 \quad *x_3 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \mid b \quad z$

1. Restriktion: 1 0 0 1 0 0 | 50 0

2. Restriktion: 0 1 0 0 1 0 | 80 0

3. Restriktion: 0 0 1 0 0 1 | 40 0

Zielfunktion: 0 0 0 -3 -2 -1 | -350 1

Ecke: $x_1 = 50, x_2 = 80, x_3 = 40, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 350$

Optimale Ecke: $x_1 = 50, x_2 = 80, x_3 = 40, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, z = 350$

www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 138