Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Operations Research
> Lineare Optimierung

Aufgabe: Ein Unternehmen stellt die Produkte A, B und C auf den Maschinen M1 und M2 her. Maximal können im Monat insgesamt 1200 Produkte hergestellt werden. Hinsichtlich der Maschinen wird bei einer Fünftagewoche und vier Wochen im Monat von einem Einschichtbetrieb mit 8 Stunden täglich ausgegangen. Die Herstellzeiten betragen pro Produkt und Maschine (in Minute/Stück):

A: M1 4, M2: 10; B: M1: 6, M2: 4; C: M1: 12, M2: 5.

a) Wie lautet der Produktionsplan des Unternehmens, wenn der Erlös maximiert werden soll und Preise von € 4,-, € 4,50 und € 5,- für die Produkte A, B und C erzielt werden können?

b) Von Produkt A sollen jetzt genau 300 Stück im Monat hergestellt werden. Wie lautet nun unter gleichen Voraussetzungen der optimale Produktionsplan?

c) Unter der Voraussetzung der Produktion von 300 Mengeneinheiten von Produkt A erhöht sich nun der Erlös von Produkt B auf € 6,- pro Stück. Zeige, dass sich dann die Produktion des Produktes C nicht mehr lohnt.

Lösung: I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen x_1, x_2 … besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten x_1, x_2 … (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion $z = z(x_1,x_2,\ldots)$. Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich mit seinen Eckpunkten, auf. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.

II. a) Die Vorgaben der Aufgabe führen auf das folgende lineare Optimierungsproblem (*):

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 1200$

2. Restriktion: $+\ 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 9600$

3. Restriktion: $+\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 9600$

Zielfunktion: $+\ 4x_1 + 4.5x_2 + 5x_3 = z$ -> Maximum

Wir verwenden dann das Simplexverfahren wie folgt:

(Dreidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 3 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 1200$

2. Restriktion: $+\ 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 9600$

3. Restriktion: $+\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 9600$

Zielfunktion: $+\ 4x_1 + 4.5x_2 + 5x_3 = z$ -> Maximum

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1u_1 = 1200$

2. Restriktion: $+\ 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 1u_2 = 9600$

3. Restriktion: $+\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 1u_3 = 9600$

Zielfunktion: $+\ 4x_1 + 4.5x_2 + 5x_3 = z$ -> Maximum

<u>Anfangstableau</u>: * = Basisvariable

	x_1	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	1	0	0	1200	0
2. Restriktion:	4	6	12	0	1	0	9600	0
3. Restriktion:	10	4	5	0	0	1	9600	0
Zielfunktion:	4	4.5	5	0	0	0	0	1

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 1200$, $u_2 = 9600$, $u_3 = 9600$, z = 0

<u>1. Schritt</u>: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 3: 12*(*1*) - 1*(*2*) / 12*(*3*) - 5*(*2*) / 12*(*Z*) - 5*(*2*) /

	x_1	x_2	$*x_3$	$*u_1$	u_2	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	8	6	0	12	-1	0	4800	0
2. Restriktion:	4	6	12	0	1	0	9600	0
3. Restriktion:	100	18	0	0	-5	12	67200	0
Zielfunktion:	28	24	0	0	-5	0	-48000	12

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 800$, $u_1 = 400$, $u_2 = 0$, $u_3 = 5600$, z = 4000

<u>2. Schritt</u>: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: 2*(*2*) - 1*(*1*) / 2*(*3*) - 25*(*1*) / 2*(*Z*) - 7*(*1*) /

	$*x_1$	x_2	$*x_3$	u_1	u_2	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	8	6	0	12	-1	0	4800	0
2. Restriktion:	0	6	24	-12	3	0	14400	0
3. Restriktion:	0	-114	0	-300	15	24	14400	0
Zielfunktion:	0	6	0	-84	-3	0	-129600	24

Ecke: $x_1 = 600$, $x_2 = 0$, $x_3 = 600$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 600$, z = 5400

<u>3. Schritt</u>: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) + 19*(*1*) / 1*(*Z*) - 1*(*1*) /

	x_1	$*x_2$	$*x_3$	u_1	u_2	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	8	6	0	12	-1	0	4800	0
2. Restriktion:	-8	0	24	-24	4	0	9600	0
3. Restriktion:	152	0	0	-72	-4	24	105600	0
Zielfunktion:	-8	0	0	-96	-2	0	-134400	24

Ecke: $x_1 = 0$, $x_2 = 800$, $x_3 = 400$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 4400$, z = 5600

<u>Optimale Ecke</u>: $x_1 = 0$, $x_2 = 800$, $x_3 = 400$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 4400$, z = 5600

Der optimale Produktionsplan sieht also die Herstellung der Produkte B und C zu 800 bzw. 400 Mengeneinheiten vor; der Erlös beträgt dann € 5600,-.

b) Wegen $x_1 = 300$ verändert sich das <u>Optimierungsproblem</u> (*) (siehe a)) zu (**):

(Zweidimensionales) <u>lineares Optimierungsproblem</u>: 3 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität:	$x_2, \quad x_3 \geq 0$
1. Restriktion:	$+ \ 1x_2 + 1x_3 \leq 900$
2. Restriktion:	$+ \ 6x_2 + 12x_3 \leq 8400$
3. Restriktion:	$+ \ 4x_2 + 5x_3 \leq 6600$
Zielfunktion:	$+ \ 4.5x_2 + 5x_3 = z + 1200$ -> Maximum

Wir verwenden dann das <u>Simplexverfahren</u> wie folgt:

Nichtnegativität:	$x_2, \quad x_3 \geq 0$
1. Restriktion:	$+ \ 1x_2 + 1x_3 \leq 900$
2. Restriktion:	$+ \ 6x_2 + 12x_3 \leq 8400$
3. Restriktion:	$+ \ 4x_2 + 5x_3 \leq 6600$
Zielfunktion:	$+ \ 4.5x_2 + 5x_3 = z + 1200$ -> Maximum

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität:		x_2,	$x_3 \geq$		0		
		u_1,	u_2,		$u_3 \geq$		0
1. Restriktion:	+	$1x_2$ +	$1x_3$ +	$1u_1$			= 900
2. Restriktion:	+	$6x_2$ +	$12x_3$	+	$1u_2$		= 8400
3. Restriktion:	+	$4x_2$ +	$5x_3$		+	$1u_3$	= 6600
Zielfunktion:	+	$4.5x_2$ +	$5x_3$ = z - 1200 -> Maximum				

Anfangstableau: * = Basisvariable

	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	|	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	0	0	|	900	0
2. Restriktion:	6	12	0	1	0	|	8400	0
3. Restriktion:	4	5	0	0	1	|	6600	0
Zielfunktion:	4.5	5	0	0	0	|	-1200	1

Ecke: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 900$, $u_2 = 8400$, $u_3 = 6600$, z = 1200

1. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: 12*(*1*) - 1*(*2*) / 12*(*3*) - 5*(*2*) / 12*(*Z*) - 5*(*2*) /

	x_2	$*x_3$	$*u_1$	u_2	$*u_3$	|	b	z
1. Restriktion:	6	0	12	-1	0	|	2400	0
2. Restriktion:	6	12	0	1	0	|	8400	0
3. Restriktion:	18	0	0	-5	12	|	37200	0
Zielfunktion:	24	0	0	-5	0	|	-56400	12

Ecke: $x_3 = 0$, $x_3 = 700$, $u_1 = 200$, $u_2 = 0$, $u_3 = 3100$, z = 4700

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: 1*(*2*) - 1*(*1*) / 1*(*3*) - 3*(*1*) / 1*(*Z*) - 4*(*1*) /

	$*x_2$	$*x_3$	u_1	u_2	$*u_3$	|	b	z
1. Restriktion:	6	0	12	-1	0	|	2400	0
2. Restriktion:	0	12	-12	2	0	|	6000	0
3. Restriktion:	0	0	-36	-2	12	|	30000	0
Zielfunktion:	0	0	-48	-1	0	|	-66000	12

Ecke: $x_2 = 400$, $x_3 = 500$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2500$, z = 5500

Optimale Ecke: $x_2 = 400$, $x_3 = 500$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2500$, z = 5500

Die optimalen Mengen sind also: A 300, B 400, C 500; der optimale Erlös beträgt € 5500,-.

c) Wegen $x_1 = 300$ und dem neuen Zielfunktionskoeffizienten für das Produkt B ergeben sich aus dem Optimierungsproblem (*) (siehe a)) folgende Restriktionen und Zielfunktion (***):

Nichtnegativität:	x_2,	$x_3 \geq$	0
1. Restriktion:	+ $1x_2$ +	$1x_3 \leq$	900
2. Restriktion:	+ $6x_2$ +	$12x_3 \leq$	8400
3. Restriktion:	+ $4x_2$ +	$5x_3 \leq$	6600
Zielfunktion:	+ $6x_2$ +	$5x_3$ = z + 1200 -> Maximum	

Wir verwenden dann das Simplexverfahren:

Lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität:	x_2,	$x_3 \geq$	0
1. Restriktion:	+ $1x_2$ +	$1x_3 \leq$	900
2. Restriktion:	+ $6x_2$ +	$12x_3 \leq$	8400
3. Restriktion:	+ $4x_2$ +	$5x_3 \leq$	6600
Zielfunktion:	+ $6x_2$ +	$5x_3$ = z + 1200 -> Maximum	

<u>Einführung von Schlupfvariablen</u>: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_2, \quad x_3 \geq 0$

$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq 0$

1. Restriktion: $+ 1x_2 + 1x_3 + 1u_1 = 900$

2. Restriktion: $+ 6x_2 + 12x_3 + 1u_2 = 8400$

3. Restriktion: $+ 4x_2 + 5x_3 + 1u_3 = 6600$

Zielfunktion: $+ 6x_2 + 5x_3 = z - 1200$ -> Maximum

<u>Anfangstableau</u>: * = Basisvariable

	x_2	x_3	$*u_1$	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	0	0	900	0
2. Restriktion:	6	12	0	1	0	8400	0
3. Restriktion:	4	5	0	0	1	6600	0
Zielfunktion:	6	5	0	0	0	-1200	1

Ecke: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $u_1 = 900$, $u_2 = 8400$, $u_3 = 6600$, z = 1200

<u>1. Schritt</u>: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: 1*(*2*) - 6*(*1*) / 1*(*3*) - 4*(*1*) / 1*(*Z*) - 6*(*1*) /

	$*x_2$	x_3	u_1	$*u_2$	$*u_3$	b	z
1. Restriktion:	1	1	1	0	0	900	0
2. Restriktion:	0	6	-6	1	0	3000	0
3. Restriktion:	0	1	-4	0	1	3000	0
Zielfunktion:	0	-1	-6	0	0	-6600	1

Ecke: $x_2 = 900$, $x_3 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3000$, $u_3 = 3000$, z = 6600

<u>Optimale Ecke</u>: $x_2 = 900$, $x_3 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3000$, $u_3 = 3000$, z = 6600

Die optimalen Mengen sind also: A 300, B 900; Produkt C wird nicht produziert; der optimale Erlös beträgt € 6600,-.

www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 140