

Mathematikaufgaben

> Operations Research

> Lineare Optimierung

Aufgabe: Ein Unternehmen stellt die Produkte A, B und C auf den Maschinen M1 und M2 her. Maximal können im Monat insgesamt 1200 Produkte hergestellt werden. Hinsichtlich der Maschinen wird bei einer Fünftagewoche und vier Wochen im Monat von einem Einschichtbetrieb mit 8 Stunden täglich ausgegangen. Die Herstellzeiten betragen pro Produkt und Maschine (in Minute/Stück):

A: M1 4, M2: 10; B: M1: 6, M2: 4; C: M1: 12, M2: 5.

- Wie lautet der Produktionsplan des Unternehmens, wenn der Erlös maximiert werden soll und Preise von € 4,-, € 4,50 und € 5,- für die Produkte A, B und C erzielt werden können?
- Von Produkt A sollen jetzt genau 300 Stück im Monat hergestellt werden. Wie lautet nun unter gleichen Voraussetzungen der optimale Produktionsplan?
- Unter der Voraussetzung der Produktion von 300 Mengeneinheiten von Produkt A erhöht sich nun der Erlös von Produkt B auf € 6,- pro Stück. Zeige, dass sich dann die Produktion des Produktes C nicht mehr lohnt.

Lösung: I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen $x_1, x_2 \dots$ besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten $x_1, x_2 \dots$ (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion $z = z(x_1, x_2, \dots)$. Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich mit seinen Eckpunkten, auf. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.

II. a) Die Vorgaben der Aufgabe führen auf das folgende lineare Optimierungsproblem (*):

Nichtnegativität: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
1. *Restriktion:* $+ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 1200$
2. *Restriktion:* $+ 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 9600$
3. *Restriktion:* $+ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 9600$
Zielfunktion: $+ 4x_1 + 4.5x_2 + 5x_3 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Wir verwenden dann das Simplexverfahren wie folgt:

(Dreidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 3 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

Nichtnegativität: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
1. *Restriktion:* $+ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leq 1200$
2. *Restriktion:* $+ 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 9600$
3. *Restriktion:* $+ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 9600$
Zielfunktion: $+ 4x_1 + 4.5x_2 + 5x_3 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
 $u_1, u_2, u_3 \geq 0$
1. *Restriktion:* $+ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1u_1 = 1200$
2. *Restriktion:* $+ 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 1u_2 = 9600$
3. *Restriktion:* $+ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 1u_3 = 9600$
Zielfunktion: $+ 4x_1 + 4.5x_2 + 5x_3 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Anfangstableau: * = Basisvariable

| | x_1 | x_2 | x_3 | u_1 | u_2 | u_3 | b | z |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-----|
| 1. Restriktion: | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1200 | 0 |
| 2. Restriktion: | 4 | 6 | 12 | 0 | 1 | 0 | 9600 | 0 |
| 3. Restriktion: | 10 | 4 | 5 | 0 | 0 | 1 | 9600 | 0 |
| Zielfunktion: | 4 | 4.5 | 5 | 0 | 0 | 0 | | 0 |

Ecke: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, u_1 = 1200, u_2 = 9600, u_3 = 9600, z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 3: $12^*(1) - 1^*(2) / 12^*(3) - 5^*(2) / 12^*(Z) - 5^*(2) /$

| | x_1 | x_2 | x_3 | u_1 | u_2 | u_3 | b | z |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1. Restriktion: | 8 | 6 | 0 | 12 | -1 | 0 | 4800 | 0 |
| 2. Restriktion: | 4 | 6 | 12 | 0 | 1 | 0 | 9600 | 0 |
| 3. Restriktion: | 100 | 18 | 0 | 0 | -5 | 12 | 67200 | 0 |
| Zielfunktion: | 28 | 24 | 0 | 0 | -5 | 0 | | -48000 |

Ecke: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 800, u_1 = 400, u_2 = 0, u_3 = 5600, z = 4000$

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: $2^*(2) - 1^*(1) / 2^*(3) - 25^*(1) / 2^*(Z) - 7^*(1) /$

| | x_1 | x_2 | x_3 | u_1 | u_2 | u_3 | b | z |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| 1. Restriktion: | 8 | 6 | 0 | 12 | -1 | 0 | 4800 | 0 |
| 2. Restriktion: | 0 | 6 | 24 | -12 | 3 | 0 | 14400 | 0 |
| 3. Restriktion: | 0 | -114 | 0 | -300 | 15 | 24 | 14400 | 0 |
| Zielfunktion: | 0 | 6 | 0 | -84 | -3 | 0 | | -129600 |

Ecke: $x_1 = 600, x_2 = 0, x_3 = 600, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 600, z = 5400$

3. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2: $1^*(2) - 1^*(1) / 1^*(3) + 19^*(1) / 1^*(Z) - 1^*(1) /$

| | x_1 | x_2 | x_3 | u_1 | u_2 | u_3 | b | z |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|
| 1. Restriktion: | 8 | 6 | 0 | 12 | -1 | 0 | 4800 | 0 |
| 2. Restriktion: | -8 | 0 | 24 | -24 | 4 | 0 | 9600 | 0 |
| 3. Restriktion: | 152 | 0 | 0 | -72 | -4 | 24 | 105600 | 0 |
| Zielfunktion: | -8 | 0 | 0 | -96 | -2 | 0 | | -134400 |

Ecke: $x_1 = 0, x_2 = 800, x_3 = 400, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 4400, z = 5600$

Optimale Ecke: $x_1 = 0, x_2 = 800, x_3 = 400, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 4400, z = 5600$

Der optimale Produktionsplan sieht also die Herstellung der Produkte B und C zu 800 bzw. 400 Mengeneinheiten vor; der Erlös beträgt dann € 5600,-.

b) Wegen $x_1 = 300$ verändert sich das Optimierungsproblem (*) (siehe a)) zu (**):

(Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 3 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

| | |
|-------------------|--|
| Nichtnegativität: | $x_2, x_3 \geq 0$ |
| 1. Restriktion: | $+ 1x_2 + 1x_3 \leq 900$ |
| 2. Restriktion: | $+ 6x_2 + 12x_3 \leq 8400$ |
| 3. Restriktion: | $+ 4x_2 + 5x_3 \leq 6600$ |
| Zielfunktion: | $+ 4.5x_2 + 5x_3 = z + 1200 \rightarrow$ Maximum |

Wir verwenden dann das Simplexverfahren wie folgt:

| | |
|-------------------|--|
| Nichtnegativität: | $x_2, x_3 \geq 0$ |
| 1. Restriktion: | $+ 1x_2 + 1x_3 \leq 900$ |
| 2. Restriktion: | $+ 6x_2 + 12x_3 \leq 8400$ |
| 3. Restriktion: | $+ 4x_2 + 5x_3 \leq 6600$ |
| Zielfunktion: | $+ 4.5x_2 + 5x_3 = z + 1200 \rightarrow$ Maximum |

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

$$\begin{array}{l} \text{Nichtnegativität: } x_2, \quad x_3 \geq \quad 0 \\ \quad \quad \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3 \geq \quad 0 \\ 1. \text{ Restriktion: } + 1x_2 + 1x_3 + 1u_1 \quad = 900 \\ 2. \text{ Restriktion: } + 6x_2 + 12x_3 \quad + 1u_2 \quad = 8400 \\ 3. \text{ Restriktion: } + 4x_2 + 5x_3 \quad \quad + 1u_3 = 6600 \\ \text{Zielfunktion: } + 4.5x_2 + 5x_3 = z - 1200 \rightarrow \text{Maximum} \end{array}$$

Anfangstableau: * = Basisvariable

$$\begin{array}{l} x_2 \quad x_3 \quad *u_1 \quad *u_2 \quad *u_3 \mid b \quad z \\ 1. \text{ Restriktion: } 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \mid 900 \quad 0 \\ 2. \text{ Restriktion: } 6 \quad 12 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \mid 8400 \quad 0 \\ 3. \text{ Restriktion: } 4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \mid 6600 \quad 0 \\ \text{Zielfunktion: } 4.5 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \mid -1200 \quad 1 \end{array}$$

Ecke: $x_2 = 0, x_3 = 0, u_1 = 900, u_2 = 8400, u_3 = 6600, z = 1200$

1. Schritt: Pivotzeile = 2, Pivotspalte = 2: $12*(1) - 1*(2) / 12*(3) - 5*(2) / 12*(Z) - 5*(2) /$

$$\begin{array}{l} x_2 \quad *x_3 \quad *u_1 \quad u_2 \quad *u_3 \mid b \quad z \\ 1. \text{ Restriktion: } 6 \quad 0 \quad 12 \quad -1 \quad 0 \mid 2400 \quad 0 \\ 2. \text{ Restriktion: } 6 \quad 12 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \mid 8400 \quad 0 \\ 3. \text{ Restriktion: } 18 \quad 0 \quad 0 \quad -5 \quad 12 \mid 37200 \quad 0 \\ \text{Zielfunktion: } 24 \quad 0 \quad 0 \quad -5 \quad 0 \mid -56400 \quad 12 \end{array}$$

Ecke: $x_2 = 0, x_3 = 700, u_1 = 200, u_2 = 0, u_3 = 3100, z = 4700$

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: $1*(2) - 1*(1) / 1*(3) - 3*(1) / 1*(Z) - 4*(1) /$

$$\begin{array}{l} *x_2 \quad *x_3 \quad u_1 \quad u_2 \quad *u_3 \mid b \quad z \\ 1. \text{ Restriktion: } 6 \quad 0 \quad 12 \quad -1 \quad 0 \mid 2400 \quad 0 \\ 2. \text{ Restriktion: } 0 \quad 12 \quad -12 \quad 2 \quad 0 \mid 6000 \quad 0 \\ 3. \text{ Restriktion: } 0 \quad 0 \quad -36 \quad -2 \quad 12 \mid 30000 \quad 0 \\ \text{Zielfunktion: } 0 \quad 0 \quad -48 \quad -1 \quad 0 \mid -66000 \quad 12 \end{array}$$

Ecke: $x_2 = 400, x_3 = 500, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 2500, z = 5500$

Optimale Ecke: $x_2 = 400, x_3 = 500, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 2500, z = 5500$

Die optimalen Mengen sind also: A 300, B 400, C 500; der optimale Erlös beträgt € 5500,-.

c) Wegen $x_1 = 300$ und dem neuen Zielfunktionskoeffizienten für das Produkt B ergeben sich aus dem Optimierungsproblem (*) (siehe a)) folgende Restriktionen und Zielfunktion (***):

$$\begin{array}{l} \text{Nichtnegativität: } x_2, \quad x_3 \geq \quad 0 \\ 1. \text{ Restriktion: } + 1x_2 + 1x_3 \leq \quad 900 \\ 2. \text{ Restriktion: } + 6x_2 + 12x_3 \leq \quad 8400 \\ 3. \text{ Restriktion: } + 4x_2 + 5x_3 \leq \quad 6600 \\ \text{Zielfunktion: } + 6x_2 + 5x_3 = z + 1200 \rightarrow \text{Maximum} \end{array}$$

Wir verwenden dann das Simplexverfahren:

Lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

$$\begin{array}{l} \text{Nichtnegativität: } x_2, \quad x_3 \geq \quad 0 \\ 1. \text{ Restriktion: } + 1x_2 + 1x_3 \leq \quad 900 \\ 2. \text{ Restriktion: } + 6x_2 + 12x_3 \leq \quad 8400 \\ 3. \text{ Restriktion: } + 4x_2 + 5x_3 \leq \quad 6600 \\ \text{Zielfunktion: } + 6x_2 + 5x_3 = z + 1200 \rightarrow \text{Maximum} \end{array}$$

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

Nichtnegativität: $x_2, x_3 \geq 0$
 $u_1, u_2, u_3 \geq 0$

1. *Restriktion:* $+ 1x_2 + 1x_3 + 1u_1 = 900$
2. *Restriktion:* $+ 6x_2 + 12x_3 + 1u_2 = 8400$
3. *Restriktion:* $+ 4x_2 + 5x_3 + 1u_3 = 6600$
Zielfunktion: $+ 6x_2 + 5x_3 = z - 1200 \rightarrow$ Maximum

Anfangstableau: * = Basisvariable

| | x_2 | x_3 | * u_1 | * u_2 | * u_3 | | b | z |
|------------------------|-------|-------|---------|---------|---------|--|-------|-----|
| 1. <i>Restriktion:</i> | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 900 | 0 |
| 2. <i>Restriktion:</i> | 6 | 12 | 0 | 1 | 0 | | 8400 | 0 |
| 3. <i>Restriktion:</i> | 4 | 5 | 0 | 0 | 1 | | 6600 | 0 |
| <i>Zielfunktion:</i> | 6 | 5 | 0 | 0 | 0 | | -1200 | 1 |

Ecke: $x_2 = 0, x_3 = 0, u_1 = 900, u_2 = 8400, u_3 = 6600, z = 1200$

1. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 1: $1*(2) - 6*(1) / 1*(3) - 4*(1) / 1*(Z) - 6*(1) /$

| | * x_2 | x_3 | u_1 | * u_2 | * u_3 | | b | z |
|------------------------|---------|-------|-------|---------|---------|--|-------|-----|
| 1. <i>Restriktion:</i> | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 900 | 0 |
| 2. <i>Restriktion:</i> | 0 | 6 | -6 | 1 | 0 | | 3000 | 0 |
| 3. <i>Restriktion:</i> | 0 | 1 | -4 | 0 | 1 | | 3000 | 0 |
| <i>Zielfunktion:</i> | 0 | -1 | -6 | 0 | 0 | | -6600 | 1 |

Ecke: $x_2 = 900, x_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 3000, u_3 = 3000, z = 6600$

Optimale Ecke: $x_2 = 900, x_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 3000, u_3 = 3000, z = 6600$

Die optimalen Mengen sind also: A 300, B 900; Produkt C wird nicht produziert; der optimale Erlös beträgt € 6600,-.