Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Operations Research
> Transportproblem

Aufgabe: Gegeben ist das folgende Transportproblem: Mengen eines Wirtschaftsgutes werden von den Lagern A, B, C mit ihren Mengenangeboten verschickt an Kunden P, Q, R, S mit ihren Bedarfen. Dabei entstehen Transportkosten, die – neben den Auslieferungsmengen und Bedarfen – als Transportkostensätze (pro Mengeneinheit des verschickten Gutes) der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Anbieter | Kunden	P	Q	R	S	Angebot (Menge)
A	6	8	10	10	50
B	4	5	3	4	80
C	5	6	6	8	120
Bedarf (Menge)	60	100	50	40	Kosten (Geld- / Mengeneinheit)

Lösung: I. Vorüberlegungen: Das Transportproblem ist innerhalb des Operations Research ein Spezialfall der linearen Optimierung z.B. mit dem Simplexverfahren. Das Transportproblem kann mit Hilfe des Transportalgorithmus gelöst werden. Hierbei wird eine zulässige Ausgangslösung mit der sog. Nordwesteneckenregel erzeugt. Die so erhaltene Ausgangsmatrix besteht aus Basiszellen mit positiven Mengenbewegungen und Nichtbasiszellen ohne transportierte Mengen. Mit Hilfe der aus den Transportkostensätzen ermittelten negativen reduzierten Kosten können entlang einer eine Nichtbasiszelle mit Basiszellen verbindenden Basisschleife Umschichtungen bei den transportierten Mengen durchgeführt werden. Dieses Vorgehen nennt man Stepping-Stone-Verfahren. Dieses kommt zum Abschluss, wenn keine Nichtbasiszellen mit negativen reduzierten Kosten mehr vorhanden sind. Das Optimum ist dann erreicht. Das Optimum beinhaltet ganzzahlige Mengen, wenn die Eingangsdaten (Angebot, Bedarf) ganzzahlig sind.

II. Wir wenden die Nordwesteckenregel an, indem wir eine Ausgangslösung des Transportproblems wie folgt erzeugen: Ausgehend von der 1. Zeile und 1. Spalte der Transportkostenmatrix, wird die zu transportierende Gesamtmenge von 250 Mengeneinheiten nacheinander so platziert, dass die Angebots- und Bedarfsrestriktionen (mit Gleichheitszeichen) erfüllt sind (Minimum der [reduzierten] Angebots- und Bedarfsmengen beachten). Es ergibt sich damit die Tableauabfolge:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6	8	10	10	50
B	4	5	3	4	80
C	5	6	6	8	120
Bedarf	60	100	50	40	Rest: 250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4	5	3	4	80
C	5	6	6	8	120
Bedarf	60	100	50	40	Rest: 200

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 10	5	3	4	80
C	5	6	6	8	120
Bedarf	60	100	50	40	Rest: 190

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 10	5 70	3	4	80
C	5	6	6	8	120
Bedarf	60	100	50	40	Rest: 120

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 10	5 70	3	4	80
C	5	6 30	6	8	120
Bedarf	60	100	50	40	Rest: 90

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 10	5 70	3	4	80
C	5	6 30	6 50	8	120
Bedarf	60	100	50	40	Rest: 40

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 10	5 70	3	4	80
C	5	6 30	6 50	8 40	120
Bedarf	60	100	50	40	Rest: 0

und infolgedessen das Ausgangstableau:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 10	5 70	3	4	80
C	5	6 30	6 50	8 40	120
Bedarf	60	100	50	40	250

mit den jeweils unten rechts ausgewiesenen zu transportierenden Mengen. Die Transportkosten ergeben sich aus der Summe der Produkte aus Mengen und Transportkostensätzen, also:

$K = 6\cdot 50+4\cdot 10+5\cdot 70+6\cdot 30+6\cdot 50+8\cdot 40 = 1490$ Geldeinheiten.

III. Wir beginnen die Suche nach der optimalen Lösung, indem zunächst die (negativen) reduzierten Kosten der Nichtbasiszellen errechnet werden. Dies geschieht, indem wir eine Nichtbasiszelle (als Zelle ohne Mengenangabe) auswählen und entlang einer Basisschleife die Transportkostensätze beim Durchlauf in waagrechter Richtung vom Transportkostensatz der Nichtbasiszelle abziehen, beim Durchlauf in senkrechter Richtung zuzählen. Wir fangen an mit der Nichtbasiszelle in der 1. Zeile und 2. Spalte der Transportkostenmatrix als Zelle (1,2) und haben als Basisschleife den Durchlauf durch die Zellen (1,2), (1,1), (2,1) und (2,2) zu betrachten. Somit gilt für die reduzierten Kosten: 8 – 6 + 4 – 5 = 1. Die reduzierten Kosten (in der Matrix in Klammern gesetzt) sind positiv, so dass die Zelle (1,2) für die Stepping-Stone-Methode nicht infrage kommt.

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10	10	50
B	4 10	5 70	3	4	80
C	5	6 30	6 50	8 40	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Für die nächste Nichtbasiszelle (1,3) ergibt sich mit Basisschleife und mit (positiven) reduzierten Kosten:

$K_{reduziert} = 10 - 6 + 4 - 5 + 6 - 6 = 3$

das Tableau:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10	50
B	4 10	5 70	3	4	80
C	5	6 30	6 50	8 40	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Zur Nichtbasiszelle (1,4) gehören Basisschleife und reduzierte Kosten:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (1)	50
B	4 10	5 70	3	4	80
C	5	6 30	6 50	8 40	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Zur Nichtbasiszelle (2,3) gehören Basisschleife und reduzierte Kosten:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (1)	50
B	4 10	5 70	3 (-2)	4	80
C	5	6 30	6 50	8 40	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Hier treten erstmals negative reduzierte Kosten auf, so dass diese Zelle beim Stepping-Stone-Verfahren durchaus Verwendung finden könnte. Wir rechnen weiter mit der Nichtbasiszelle (2,4) und erhalten:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (1)	50
B	4 10	5 70	3 (-2)	4 (-3)	80
C	5	6 30	6 50	8 40	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Zuletzt gehören zur Nichtbasiszelle (3,1) Basisschleife und reduzierte Kosten:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (1)	50
B	4 10	5 70	3 (-2)	4 (-3)	80
C	5 (0)	6 30	6 50	8 40	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Wir wählen (durchaus willkürlich) nun die Nichtbasiszelle mit den betragsmäßig größten negativen reduzierten Kosten aus, hier also: Zelle (2,4). Entlang der Basisschleife, die zu dieser Zelle gehört, führen wir abwechselnd Subtraktionen (waagrechte Richtung) und Additionen (senkrechte Richtung) entlang der Schleife aus; addiert und subtrahiert wird die kleinste Menge der waagerecht angelaufenen Basiszellen, hier also die 40 Mengeneinheiten der Basiszelle (3,4) (als Minimum der Zahlen 70 und 40). Es ergeben sich die Mengenumschichtungen im folgenden Tableau:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 10	5 30	3	4 40	80
C	5	6 70	6 50	8 0	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Die Transportkosten betragen nun:

K = 6·50+4·10+5·30+6·70+6·50+4·40 = 1370 Geldeinheiten.

Damit wurden die Transportkosten um den Betrag (-3)·40 = -120 Geldeinheiten reduziert. Die Reduktion ist das Produkt von reduzierten Kosten und umgeschichteter Menge.

IV. Wir verfahren mit der Stepping-Stone-Methode weiter und untersuchen im zweiten Optimierungsschritt wiederum die Nichtbasiszellen. Bzgl. Zelle (1,2) ergibt sich keine Änderung der reduzierten Kosten, da sich die Basisschleife nicht verändert hat:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10	10	50
B	4 10	5 30	3	4 40	80
C	5	6 70	6 50	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Das Gleiche gilt für die Nichtbasiszelle (1,3):

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10	50
B	4 10	5 30	3	4 40	80
C	5	6 70	6 50	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Durch den Nichtbasis-Basis-Austausch der Zellen (2,4) und (3,4) verändern sich die reduzierten Kosten bei der Nichtbasiszelle (1,4):

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (4)	50
B	4 10	5 30	3	4 40	80
C	5	6 70	6 50	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Keine Veränderung ergibt sich auch bzgl. der Nichtbasiszelle (2,3):

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (4)	50
B	4 10	5 30	3 (-2)	4 40	80
C	5	6 70	6 50	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

und der Zelle (3,1):

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (4)	50
B	4 10	5 30	3 (-2)	4 40	80
C	5 (0)	6 70	6 50	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Die neue Nichtbasiszelle (3,4) hat Basisschleife und (notwendigerweise positive) reduzierte Kosten:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (4)	50
B	4 10	5 30	3 (-2)	4 40	80
C	5 (0)	6 70	6 50	8 (3)	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Als einzige Nichtbasiszelle mit negativen reduzierten Kosten bleibt die Zelle (2,3) übrig. Dazugehörige Basisschleife und Mengenumschichtungen mit 30 Mengeneinheiten (als Minimum der Zahlen 30 und 50) lauten:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 10	5 0	3 30	4 40	80
C	5	6 100	6 20	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Die Transportkosten betragen nun:

$K = 6\cdot 50+4\cdot 10+3\cdot 30+6\cdot 100+6\cdot 20+4\cdot 40 = 1310$ Geldeinheiten.

Damit wurden die Transportkosten um den Betrag $(-2)\cdot 40 = -60$ Geldeinheiten reduziert.

V. Wir überprüfen wieder, ob das Verfahren abgeschlossen ist oder nicht. Die Ermittlung der reduzierten Kosten für die nunmehrigen Nichtbasiszellen (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1) und (3,4) ergibt die jeweiligen Tableaus mit den Basisschleifen:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (3)	10	10	50
B	4 10	5	3 30	4 40	80
C	5	6 100	6 20	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (3)	10 (5)	10	50
B	4 10	5	3 30	4 40	80
C	5	6 100	6 20	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (3)	10 (5)	10 (4)	50
B	4 10	5	3 30	4 40	80
C	5	6 100	6 20	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (3)	10 (5)	10 (4)	50
B	4 10	5 (2)	3 30	4 40	80
C	5	6 100	6 20	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (3)	10 (5)	10 (4)	50
B	4 10	5 (2)	3 30	4 40	80
C	5 (-2)	6 100	6 20	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (3)	10 (5)	10 (4)	50
B	4 10	5 (2)	3 30	4 40	80
C	5 (-2)	6 100	6 20	8 (1)	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Die Nichtbasiszelle (3,1) hat also noch negative reduzierte Kosten, so dass Umschichtungen entlang der dazugehörigen Basisschleife mit 10 Mengeneinheiten (Minimum der Zahlen 20 und 10) ergeben:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4 0	5	3 40	4 40	80
C	5 10	6 100	6 10	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Die Transportkosten betragen nun:

$K = 6\cdot 50+5\cdot 10+6\cdot 100+3\cdot 40+6\cdot 10+4\cdot 40 = 1290$ Geldeinheiten.

Damit wurden die Transportkosten um den Betrag $(-2)\cdot 10 = -20$ Geldeinheiten reduziert.

VI. Wir machen weiter und haben für die Nichtbasiszellen (1,2), (1,3), (1,4) (2,1), (2,2) und (3,4) die reduzierten Kosten:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10	10	50
B	4	5	3 40	4 40	80
C	5 10	6 100	6 10	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10	50
B	4	5	3 40	4 40	80
C	5 10	6 100	6 10	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (2)	50
B	4	5	3 40	4 40	80
C	5 10	6 100	6 10	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (2)	50
B	4 (2)	5	3 40	4 40	80
C	5 10	6 100	6 10	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (2)	50
B	4 (2)	5 (2)	3 40	4 40	80
C	5 10	6 100	6 10	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8 (1)	10 (3)	10 (2)	50
B	4 (2)	5 (2)	3 40	4 40	80
C	5 10	6 100	6 10	8 (1)	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Alle errechneten reduzierten Kosten sind nichtnegativ. Wir haben damit das Optimum erreicht. Das optimale Tableau lautet:

	P	Q	R	S	Angebot
A	6 50	8	10	10	50
B	4	5	3 40	4 40	80
C	5 10	6 100	6 10	8	120
Bedarf	60	100	50	40	250

Somit sollten 50 Mengeneinheiten des Gutes von A nach P, 40 von B nach R, 40 von B nach S, 10 von C nach P, 100 von C nach Q, 10 von C nach R geliefert werden. Die optimalen Transportkosten betragen hierbei 1290 Geldeinheiten.

www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 301