**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Lineare Algebra
## > Determinanten

---

**Aufgabe**: Bestimme die Determinante der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Lösung**: I. Determinanten von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

n=2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

(Sarrusregel)

n>3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \ldots\ a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n-11}\ldots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

Die Determinanten genügen den folgenden Eigenschaften:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ra_{i1} & ra_{i2} & \ldots & ra_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (i=1, … n; r reell) (*)

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}+ra_{11} & a_{i2}+ra_{12} & \ldots & a_{in}+ra_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (i=1, … n; r reell) u.ä. (**), d.h.: Determinanten sind in jeder Zeile linear bzgl. dem Zeilenvielfachen und der Addition von Zeilen. Dasselbe gilt für die Spalten der Determinante auf Grund von:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

mit $A^T$ als transponierter Matrix. Zudem ist – Invertierbarkeit der Matrix vorausgesetzt – die Determinante der inversen Matrix $A^{-1}$:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)},$$

woraus im Übrigen folgt, dass eine Matrix A invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Ist die Matrix A eine Matrix in Dreiecksgestalt (Stufenform), so gilt:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn} \quad (***),$$

d.h.: die Determinante errechnet sich als Produkt der Diagonalelemente der Matrix.

II. Die Beziehungen (*), (**), (***) geben nun Anlass bei der Berechnung der Determinante der Matrix A diese Matrix in eine Matrix in Dreiecksgestalt umzuformen, was mit Hilfe des Gauß-Verfahrens erfolgen kann.

Gegeben ist die Matrix A mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{nn} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch die Dreiecksgestalt einer Matrix:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & ... & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}^* & ... & a_{2n}^* \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Addiert man dabei Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile, ändert sich der Wert der Determinante nicht; er ändert sich vom Vorzeichen, wenn Zeilen vertauscht werden, er ändert sich um ein Vielfaches r, wenn eine Zeile mit r multipliziert wird. Damit gilt:

$$\det(A) = (-1)^v \cdot \frac{1}{r_2 ... r_n} \cdot \det(A^*)$$

mit v als Anzahl der Zeilenvertauschungen und $r_2$, … $r_n$ als Faktoren (auch 1), mit denen Zeilen multipliziert wurden. Die beschriebene Vorgehensweise garantiert das Rechnen mit ganzen Zahlen, wenn die Matrix A nur ganzzahlige Komponenten besitzt.

III. Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor und haben die <u>Umformungen</u>:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{2\cdot(2)}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{(2)+(1)}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{(3)+(1)}{=}$$

$$2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{(4)+(1)}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{(4)-(2)}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$2\cdot(-1)\cdot 3\cdot 5\cdot 1 = -30.$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1290