

Mathematikaufgaben

> Lineare Algebra

> Eigenwerte, Eigenvektoren

Aufgabe: Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: I. Für eine reelle quadratische $n \times n$ -Matrix A und die $n \times n$ -Einheitsmatrix E heißt $A - \lambda E$ die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ , $\det(A - \lambda E)$ die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (*)$$

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren \vec{x} , die unter der Matrix A als Abbildung um das λ -Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

- Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
- Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
- Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum $\sigma(A)$. Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius $\rho(A)$.
- Die Spur der Matrix A $\text{Sp}(A)$ ist die Summe ihrer Eigenwerte.
- Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
- Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („ A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
- Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k ($1 \leq k \leq n$) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
- Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***)$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4 , ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A , so heißt ein Vektor \vec{x} , der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ . Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern)

tern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda)$ zum Eigenwert λ . Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

II. Determinanten von reell besetzten quadratischen $n \times n$ -Matrizen A sind reelle Zahlen $\det(A) = |A|$ von der (rekursiv definierten) Form:

$$n=2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$n=3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$$

(Sarrusregel)

$$n>3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-12} \dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

III. Wir bestimmen zunächst die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

mit:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

als:

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda(1-\lambda)^2 + 0 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - 0 = -\lambda(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = 0$$

(Determinantenentwicklung gemäß der Sarrusregel). Die Gleichung lässt sich wie folgt nach λ umstellen:

$$\begin{aligned} -\lambda(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) &= 0 && \text{(Ausklammern)} \\ (1-\lambda)[- \lambda(1-\lambda) - 2] &= 0 && \text{(Satz vom Nullprodukt)} \\ 1-\lambda = 0, -\lambda(1-\lambda) - 2 & && | + \lambda \\ 1 = \lambda, \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 & && \text{(abc-Formel)} \\ \lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2. & && \end{aligned}$$

$\lambda = -1, \lambda = 1, \lambda = 2$ sind Lösungen der charakteristischen Gleichung und damit Eigenwerte der Matrix A .

IV. Wir bestimmen zu den drei gefundenen Eigenwerten die Eigenvektoren wie folgt:

$$\underline{\lambda = -1}: A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + E) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} + 2x_1 & & + 1x_3 & = 0 \\ & + 2x_2 & + 1x_3 & = 0 \\ + 1x_1 & + 1x_2 & + 1x_3 & = 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $2 \cdot (3) - 1 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: $1 \cdot (3) - 1 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} + 2x_1 & & + 1x_3 = 0 \\ & + 2x_2 & + 1x_3 = 0 \\ & & 0 = 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = 0 - 0.5t \\ x_1 = 0 - 0.5t \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenvektoren } \vec{x}_{\lambda=-1} = t \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}, t \text{ reell.}$$

$$\underline{\lambda = 1}: A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - E) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} & & + 1x_3 = 0 \\ & & + 1x_3 = 0 \\ + 1x_1 & + 1x_2 & + 1x_3 = 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Zeilentausch: (1) \leftrightarrow (3) /

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) - 2 \cdot (3) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Zeilentausch: (2) \leftrightarrow (3) /

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} + 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 0 \\ + 0 &= 0 \\ + 1x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= t \\ x_1 &= -t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenvektoren } \vec{x}_{\lambda=-1} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \text{ reell.}$$

$$\underline{\lambda = 2}: A - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - 2E) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} - 1x_1 + 1x_3 &= 0 \\ - 1x_2 + 1x_3 &= 0 \\ + 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $1 \cdot (3) + 1 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: $1 \cdot (3) + 1 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} - 1x_1 + 1x_3 &= 0 \\ - 1x_2 + 1x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= 0 + 1t \\ x_1 &= 0 + 1t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenvektoren } \vec{x}_{\lambda=2} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \text{ reell.}$$

Die Eigenvektoren zur Matrix A und zu den Eigenwerten $\lambda = -1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ sind also Vielfache

$$\text{von: } \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$