Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Eigenwerte, -vektoren, Diagonalisierbarkeit

Aufgabe: Diagonalisiere durch unitäres Diagonalisieren die symmetrische Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: I. Für eine reelle quadratische n×n-Matrix A und die n×n-Einheitsmatrix E heißt A–λE die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ, det(A–λE) die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

det(A–λE) = 0 (*)

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren $\vec{x}$, die unter der Matrix A als Abbildung um das λ-Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

a) Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
b) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
c) Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum σ(A). Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius ρ(A).
d) Die Spur der Matrix A Sp(A) ist die Summe ihrer Eigenwerte.
e) Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
f) Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
g) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
h) Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k (1≤k≤n) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
i) Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***).$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4, ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so heißt ein Vektor $\vec{x}$, der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum Eig(A, λ) zum Eigenwert λ. Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

II. <u>Determinanten</u> von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

<u>n=2</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

<u>n=3</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right| = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

(Sarrusregel)

<u>n>3</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \dots\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-11}\dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

III. Eine reelle quadratische n×n-Matrix A ist <u>unitär diagonalisierbar</u>, wenn es eine reelle n×n-Matrix S als Transformationsmatrix gibt mit $S^{-1} = S^T$ (Übereinstimmung von transponierter und inverser Matrix bei unitären Matrizen), so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, die in der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix A enthält. Die unitäre Diagonalisierbarkeit einer symmetrischen Matrix A ist gegeben, wenn z.B. das charakteristische Polynom det(A–λE) in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt oder Eigenvektoren von A eine Basis des n-dimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^n$ bilden. Ist A hierbei nicht symmetrisch, so gelingt vermöge der Transformationsmatrix S mit $S^{-1} = S^T$ nur die Umwandlung in eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelementen. Eine Diagonalisierbarkeit von A ist aber möglich über die Jordansche Normalform (Jordanmatrix).

IV. Wir bestimmen zunächst die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

det(A–λE) = 0

mit:

A – λE = $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2-\lambda \end{pmatrix}$

als:

det(A–λE) = - (1-λ)(2-λ) – 6 = $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

(Determinantenentwicklung). Die Gleichung lässt sich nach λ umstellen:

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ (abc-Formel)

λ = -1, λ = 4.

λ = -1, λ = 4 sind Lösungen der charakteristischen Gleichung und damit <u>Eigenwerte</u> der Matrix A.

V. Wir bestimmen zu den zwei gefundenen Eigenwerten die <u>Eigenvektoren</u> wie folgt:

$\underline{\lambda = -1}$: A + E = $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$ => $(A+E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ \quad 2x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0$
$+ \quad \sqrt{6}x_1 + 3x_2 = 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	|	*R.S.*
2	√6	|	0
√6	3	|	0

<u>1. Schritt</u>: 2*(*2*) - √6*(*1*) /

2	√6	|	0
0	0	|	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ \; 2x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0$
$0 = 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

x_2 = t
x_1 = 0 - √6t/2

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=-1} = t\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell.

$\underline{\lambda = 4}$: A – 4·E = $\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$ => $(A-4E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$- \quad 3x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0$
$+ \quad \sqrt{6}x_1 - 2x_2 = 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	|	*R.S.*
-3	√6	|	0
√6	-2	|	0

<u>1. Schritt</u>: 3*(*2*) + √6*(*1*) /

-3	√6	|	0
0	0	|	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$- \; 3x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0$
$0 = 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

x_2 = t
x_1 = 0 + √6t/3

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=4} = t\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell.

Die Eigenvektoren zur Matrix A und zu den Eigenwerten λ = -1, λ = 4 sind also Vielfache von:

$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ (Letztere stellen Basisvektoren der Eigenräume der Eigenvektoren dar).

VI. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig sind, bilden die zwei Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des zweidimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^2$.

Die symmetrische Matrix A ist somit in eine Diagonalmatrix transformierbar. Die Transformationsmatrix S bezieht sich auf die Basis der Eigenvektoren, die aber als Orthonormalbasis dargestellt werden muss. Die Vektoren $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen schon senkrecht aufeinander (Skalarprodukt als -1 + 1 = 0), so dass sie nur noch normiert werden müssen. Die Normierung der beiden Vektoren ergibt die Vektoren $\frac{\sqrt{10}}{5}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{3}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ als Orthonormalbasis. Die Transformationsmatrix S besteht spaltenweise aus den Vektoren der Orthonormalbasis, also:

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} & \frac{3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Die inverse Transformationsmatrix S^{-1} ist erwartungsgemäß:

$$S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

denn es gilt: $S^{-1}\cdot S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = E. Wir berechnen die Diagonalmatrix D:

$$D = S^{-1}AS = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix D lautet also: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ und enthält wie gewünscht in der Hauptdiagonalen die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

In der unitären Transformationsmatrix S spielt im Übrigen die Reihenfolge der orthonormalen Vektoren keine Rolle, in der Diagonalmatrix D wechseln nur die Eigenwerte ihre Position.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1411