Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Eigenwerte, Eigenvektoren, Trigonalisierung

Aufgabe: Transformiere die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

in eine Dreiecksmatrix D.

Lösung: I. Für eine reelle quadratische n×n-Matrix A und die n×n-Einheitsmatrix E heißt A–λE die <u>charakteristische Matrix</u> für reelle (komplexe) λ, det(A–λE) die Determinante der charakteristischen Matrix, das <u>charakteristische Polynom</u>. Die Gleichung:

det(A–λE) = 0 (*)

heißt <u>charakteristische Gleichung</u> und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen <u>Eigenwerte</u>. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (**)$$

für <u>Eigenvektoren</u> $\vec{x}$, die unter der Matrix A als Abbildung um das λ-Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

a) Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
b) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
c) Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt <u>Spektrum</u> σ(A). Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt <u>Spektralradius</u> ρ(A).
d) Die <u>Spur</u> der Matrix A Sp(A) ist die Summe ihrer Eigenwerte.
e) Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
f) Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („A transponiert") hat nur reelle Eigenwerte.
g) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
h) Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k (1≤k≤n) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
i) Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***).$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4, ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so heißt ein Vektor $\vec{x}$, der die Gleichung (**) erfüllt, <u>Eigenvektor</u>

zum Eigenwert λ. Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A-\lambda E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum Eig(A, λ) zum Eigenwert λ. Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

II. Determinanten von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

n=2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

(Sarrusregel)

n>3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \ldots\ a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n-11}\ldots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

III. Eine reelle quadratische n×n-Matrix A ist unitär diagonalisierbar, wenn es eine reelle n×n-Matrix S als Transformationsmatrix gibt mit $S^{-1} = S^T$ (Übereinstimmung von transponierter und inverser Matrix bei unitären Matrizen), so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, die in der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix A enthält. Die unitäre Diagonalisierbarkeit einer symmetrischen Matrix A ist gegeben, wenn z.B. das charakteristische Polynom det(A–λE) in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt oder Eigenvektoren von A eine Basis des n-dimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^n$ bilden. Ist A hierbei nicht symmetrisch, so gelingt vermöge der Transformationsmatrix S mit $S^{-1} = S^T$ nur die Umwandlung in eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten als Hauptdiagonalelementen (Trigonalisierung). Eine Diagonalisierbarkeit von A ist aber unter den gegebenen Voraussetzungen möglich über die Jordansche Normalform (Jordanmatrix).

IV. Wir bestimmen zunächst die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

det(A–λE) = 0

mit:

A – λE = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

als:

det(A–λE) = - (1-λ)(2-λ) – 6 = λ^2 – 3λ – 4 = 0

(Determinantenentwicklung). Die Gleichung lässt sich nach λ umstellen:

λ^2 – 3λ – 4 = 0 (abc-Formel)

λ = -1, λ = 4.

λ = -1, λ = 4 sind Lösungen der charakteristischen Gleichung und damit Eigenwerte der Matrix A.

V. Wir bestimmen zu den zwei gefundenen Eigenwerten die Eigenvektoren wie folgt:

<u>λ = -1</u>: A + E = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ => $(A+E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ \; 2x_1 \; + \; 3x_2 \; = \; 0$
$+ \; 2x_1 \; + \; 3x_2 \; = \; 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	|	*R.S.*
2	3	|	0
2	3	|	0

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 1*(*1*) /

2	3	|	0
0	0	|	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ \; 2x_1 \; + \; 3x_2 \; = \; 0$
$0 \; = \; 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

x_2 = t
x_1 = 0 - 1.5t

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=-1} = t\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell.

<u>λ = 4</u>: A – 4·E = $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ => $(A-4E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$- \; 3x_1 \; + \; 3x_2 \; = \; 0$
$+ \; 2x_1 \; - \; 2x_2 \; = \; 0$

<u>Anfangstableau</u>:

x_1	x_2	|	*R.S.*
-3	3	|	0
2	-2	|	0

<u>1. Schritt</u>: 3*(*2*) + 2*(*1*) /

-3	3	|	0
0	0	|	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$- \; 3x_1 \; + \; 3x_2 \; = \; 0$
$0 \; = \; 0$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

x_2 = t
x_1 = 0 + 1t

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=4} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell.

Die Eigenvektoren zur Matrix A und zu den Eigenwerten λ = -1, λ = 4 sind also Vielfache von:
$\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Letztere stellen Basisvektoren der Eigenräume der Eigenvektoren dar).

VI. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig sind, bilden die zwei Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des zweidimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^2$. Die nicht symmetrische Matrix A ist somit in eine Dreiecksmatrix transformierbar. Die Transformationsmatrix S bezieht sich auf die Basis der Eigenvektoren, die aber als Orthonormalbasis dargestellt werden muss. Gemäß dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren rechnen wir:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-0{,}5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}25 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}25 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}.$$

Normierung der beiden Vektoren ergibt die Vektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{4}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1{,}25 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$ als Orthonormalbasis.

Die Transformationsmatrix S besteht spaltenweise aus den Vektoren der Orthonormalbasis, also:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Transformationsmatrix S^{-1} ist erwartungsgemäß:

$$S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

denn es gilt: $S^{-1} \cdot S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. Wir berechnen die Dreiecksmatrix D:

$$D = S^{-1}AS = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In der Transformationsmatrix S spielt im Übrigen die Reihenfolge der orthonormalen Vektoren keine Rolle, in der Dreiecksmatrix D wechseln gegebenfalls die Eigenwerte ihre Position. Sei dazu nun:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt:

$$D = S^{-1}AS = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1412