Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Eigenwerte, -vektoren, Diagonalisierbarkeit

Aufgabe: Bestimme durch unitäres Diagonalisieren eine Diagonalmatrix zur symmetrischen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: I. Für eine reelle quadratische n×n-Matrix A und die n×n-Einheitsmatrix E heißt A–λE die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ, det(A–λE) die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

$$\det(A-\lambda E) = 0 \quad (*)$$

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A-\lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren $\vec{x}$, die unter der Matrix A als Abbildung um das λ-Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

a) Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
b) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
c) Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum σ(A). Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius ρ(A).
d) Die Spur der Matrix A Sp(A) ist die Summe ihrer Eigenwerte.
e) Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
f) Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
g) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
h) Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k (1≤k≤n) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
i) Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***).$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4, ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so heißt ein Vektor $\vec{x}$, der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A-\lambda E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum Eig(A, λ) zum Eigenwert λ. Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

II. Determinanten von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

n=2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

(Sarrusregel)

n>3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \dots\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-11}\dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

III. Eine reelle quadratische n×n-Matrix A ist diagonalisierbar, wenn es eine reelle n×n-Matrix S als Transformationsmatrix gibt mit $S^{-1} = S^T$ (Übereinstimmung von transponierter und inverser Matrix), so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, die in der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix A enthält. Die Diagonalisierbarkeit von A ist gegeben, wenn z.B. das charakteristische Polynom det(A–λE) in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt oder Eigenvektoren von A eine Basis des n-dimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^n$ bilden.

IV. Wir bestimmen zunächst die Lösungen der charakteristischen Gleichung:

det(A–λE) = 0

mit:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

als:

$\det(A–\lambda E) = - \lambda(1-\lambda)^2 + 0 – (1-\lambda) – (1-\lambda) – 0 = - \lambda(1-\lambda)^2 – 2(1-\lambda) = 0$

(Determinantenentwicklung gemäß der Sarrusregel). Die Gleichung lässt sich wie folgt nach λ umstellen:

$- \lambda(1-\lambda)^2 – 2(1-\lambda) = 0$	(Ausklammern)
$(1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda) – 2] = 0$	(Satz vom Nullprodukt)
$1-\lambda = 0,\ -\lambda(1-\lambda) – 2$	$\| + \lambda$
$1 = \lambda,\ \lambda^2 – \lambda – 2 = 0$	(abc-Formel)
$\lambda = 1,\ \lambda = -1,\ \lambda = 2$.	

λ = -1, λ = 1, λ = 2 sind Lösungen der charakteristischen Gleichung und damit Eigenwerte der Matrix A.

V. Wir bestimmen zu den drei gefundenen Eigenwerten die Eigenvektoren wie folgt:

$\underline{\lambda = -1}$: A + E = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ => $(A+E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

Lineares Gleichungssystem:

$+\ 2x_1 \qquad\quad + 1x_3 = 0$
$\qquad + 2x_2 + 1x_3 = 0$
$+\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	*R.S.*
2	0	1	0
0	2	1	0
1	1	1	0

1. Schritt: 2*(*3*) - 1*(*1*) /

2	0	1	0
0	2	1	0
0	2	1	0

2. Schritt: 1*(*3*) - 1*(*2*) /

2	0	1	0
0	2	1	0
0	0	0	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+\ 2x_1 \qquad\quad + 1x_3 = 0$
$\qquad + 2x_2 + 1x_3 = 0$
$\qquad\qquad\qquad 0 = 0$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_2 = 0 - 0.5t$
$x_1 = 0 - 0.5t$

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=-1} = t\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$, t reell.

$\underline{\lambda = 1}$: A – E = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ => $(A-E)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

Lineares Gleichungssystem:

$\qquad\qquad\qquad + 1x_3 = 0$
$\qquad\qquad\qquad + 1x_3 = 0$
$+\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	*R.S.*
0	0	1	0
0	0	1	0
1	1	1	0

Zeilentausch: (*1*) <-> (*3*) /

1	1	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0

1. Schritt: 1*(2) – 2*(3) /

1	1	1	|	0
0	0	1	|	0
0	0	0	|	0

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

1	1	1	|	0
0	0	0	|	0
0	0	1	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrl} +1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = 0 \\ & & +0 & = 0 \\ & & +1x_3 & = 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = 0$
$x_2 = t$
$x_1 = -t$

=> Eigenvektoren $\overset{->}{x}_{\lambda=1} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, t reell.

λ = 2: A – 2·E = $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ => $(A-2E)\cdot\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\overset{->}{x} = \overset{->}{0}$ =>

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrl} -1x_1 & & +1x_3 & = 0 \\ & -1x_2 & +1x_3 & = 0 \\ +1x_1 & +1x_2 & -2x_3 & = 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	|	*R.S.*
-1	0	1	|	0
0	-1	1	|	0
1	1	-2	|	0

1. Schritt: 1*(*3*) + 1*(*1*) /

-1	0	1	|	0
0	-1	1	|	0
0	1	-1	|	0

2. Schritt: 1*(*3*) + 1*(*2*) /

-1	0	1	|	0
0	-1	1	|	0
0	0	0	|	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrl} -1x_1 & & +1x_3 & = 0 \\ & -1x_2 & +1x_3 & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_3 = t$
$x_2 = 0 + 1t$
$x_1 = 0 + 1t$

=> Eigenvektoren $\overset{->}{x}_{\lambda=2} = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, t reell.

Die Eigenvektoren zur Matrix A und zu den Eigenwerten λ = -1, λ = 1, λ = 2 sind also Vielfache von: $\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (Letztere stellen Basisvektoren der Eigenräume der Eigenvektoren dar).

VI. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig sind, bilden die drei Eigenvektoren $\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ eine Basis des dreidimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^3$. Die Matrix A ist somit diagonalisierbar. Die Transformationsmatrix S bezieht sich auf die Basis der Eigenvektoren, die aber als Orthonormalbasis dargestellt werden muss. Zur Orthogonalisierung der angegebenen Eigenvektoren verwenden wir das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren und erhalten die orthonormalen Vektoren:

$$\overset{->}{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overset{->}{v}_1^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overset{->}{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overset{->}{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overset{->}{v}_3 = \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overset{->}{v}_3 = \frac{3}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix S besteht spaltenweise aus den Vektoren der Orthonormalbasis, also:

$$S = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Es ist:

$$S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Diagonalmatrix D:

$$D = S^{-1}AS = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ 2\sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix D lautet also: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und enthält wie gewünscht in der Hauptdiagonalen die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

In der unitären Transformationsmatrix S spielt im Übrigen die Reihenfolge der orthonormalen Vektoren keine Rolle, in der Diagonalmatrix D wechseln nur die Eigenwerte ihre Position.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1413