Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Matrizen

Aufgabe: Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die transponierte Matrix A^T.
b) Berechne A^T*A.
c) Berechne $A*A^T$.

Lösung: a) I. *m*x*n*-Matrizen sind von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit m Zeilen und n Spalten für natürliche Zahlen m, n. Das Transponieren einer Matrix A bewirkt ein Vertauschen von Zeilen und Spalten zu einer *nxm*-Matrix A^T mit:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

II. Zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ bestimmt sich die transponierte Matrix A^T als:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) I. Das Matrizenprodukt (mit der üblichen Matrixmultiplikation) von A^T und A heißt Gramsche Matrix:

$$G = A^T*A.$$

II. Die Matrixmultiplikation von zwei *m*x*n*- bzw. *n*x*p*-Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

folgt dem Schema:

$$A*B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ip} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}$$

mit A*B als *mxp*-Matrix.

III. Mit A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und A^T = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt die Matrixmultiplikation:

Matrizenmultiplikation:

$$A^T*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

c) Mit A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und A^T = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt die Matrixmultiplikation:

Matrizenmultiplikation:

$$A*A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1283