Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Matrizen

Aufgabe: Führe die Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \text{ α, β reell}$$

durch.

Lösung: I. Die <u>Matrixmultiplikation</u> von zwei *m*x*n*- bzw. *n*x*p*-Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix}$$

folgt dem Schema:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ip} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ip} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}$$

mit A·B als *mxp*-Matrix.

II. Es gelten zudem die trigonometrischen Beziehungen hinsichtlich des Sinus und Kosinus:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)).$$

III. Mit A = $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ ergibt die Matrixmultiplikation:

A·B = $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))-\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) & -\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))-\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)) \\ \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))+\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)) & -\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))+\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}.$$

D.h.: Die Multiplikation der Matrizen A und B mit Winkel α und β ergibt eine gleich aufgebaute Matrix A·B mit den addierten Winkeln α+β. Geometrisch ausgedrückt, stellen die Matrizen A und B Drehungen um die Winkel α und β dar, A·B die Hintereinanderschaltung von zwei Drehungen, die folglich eine Drehung um den Winkel α+β ist.

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1292