Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Matrizen

Aufgabe: Bestimme für die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ \alpha \text{ reell}$$

die Matrixpotenz A^n mit n als natürlicher Zahl.

Lösung: I. Die Matrixmultiplikation von zwei *m*x*n*- bzw. *n*x*p*-Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix}$$

folgt dem Schema:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ip} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ip} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}$$

mit A·B als *mxp*-Matrix.

II. Es gelten zudem die trigonometrischen Beziehungen hinsichtlich des Sinus und Kosinus:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)).$$

III. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen $n\varepsilon\mathbf{N}$ bzw. $n\varepsilon\mathbf{N_0}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0\varepsilon\mathbf{N}$ bzw. $k_0\varepsilon\mathbf{N_0}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen $n\varepsilon\mathbf{N}$.

IV. Mit A = $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ und B = $\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ ergibt die Matrixmultiplikation:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))-\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) & -\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))-\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))\\ \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))+\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)) & -\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))+\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}.$$

Es gilt also die Identität:

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} \text{ (*).}$$

V. Wir vermuten für die Matrix A = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ die Gültigkeit der Beziehung:

$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ mit n als natürlicher Zahl

und beweisen dies mit Hilfe der vollständigen Induktion wie folgt:

Behauptung: $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ für alle nε**N**.

Beweis:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $A^1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ = A als wahre Aussage

[bzw.: n=2 mit $A^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$ gemäß (*) mit α = β]

2) *Induktionsannahme* für n=k: $A^k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}$ sei eine wahre Aussage (**).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos((k+1)\alpha) & -\sin((k+1)\alpha) \\ \sin((k+1)\alpha) & \cos((k+1)\alpha) \end{pmatrix}$ ist als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Es gilt mit (*) für die Winkel kα und α:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A \underset{(**)}{=} \begin{pmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \cos(k\alpha+\alpha) & -\sin(k\alpha+\alpha) \\ \sin(k\alpha+\alpha) & \cos(k\alpha+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos((k+1)\alpha) & -\sin((k+1)\alpha) \\ \sin((k+1)\alpha) & \cos((k+1)\alpha) \end{pmatrix},$$

womit der Induktionsbehauptung bewiesen ist.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle nε**N**.

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1293