

Mathematikaufgaben

> Lineare Algebra

> Matrizen

Aufgabe: Gegeben ist für einen beliebigen festen Winkel α , $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

die einem zweidimensionalen Punkt durch Drehung um den Winkel α um den Ursprung eines x_1 - x_2 -Koordinatensystems einen zweidimensionalen Bildpunkt zuordnet. Zeige, dass die Matrix A eine lineare Abbildung auf $\mathbf{R}^2$ beschreibt. Es gilt dabei die übliche Matrixmultiplikation mit Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ aufgrund von: } A: \vec{v} \rightarrow A \cdot \vec{v}.$$

Lösung: I. Sind V, W Vektorräume über dem Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen, so heißt eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ linear, wenn für Vektoren x, y und reelle Zahlen r gilt:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \quad x, y \in V \\ f(rx) &= r \cdot f(x), \quad r \in \mathbf{R}, \quad v \in V. \end{aligned}$$

Eine lineare Abbildung genügt also den Eigenschaften von Additivität und Homogenität, sie ist eine lineare Transformation oder ein Vektorraumhomomorphismus, der den Regeln der Addition und Skalarmultiplikation von Vektoren in den jeweiligen Vektorräumen genügt.

II. Für beliebige Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ und reelle Zahlen r gilt mit der vorgegebenen

$$\text{Drehmatrix } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}:$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} & \vec{y} \end{pmatrix} = A \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (x_1 + y_1)\cos \alpha - (x_2 + y_2)\sin \alpha \\ (x_1 + y_1)\sin \alpha + (x_2 + y_2)\cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha \\ y_1 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} r & \vec{x} \end{pmatrix} = A \cdot \left(r \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \cos \alpha - rx_2 \sin \alpha \\ rx_1 \sin \alpha + rx_2 \cos \alpha \end{pmatrix} =$$

$$r \begin{pmatrix} x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r \cdot A \cdot \vec{x}.$$

Hieraus folgt die Linearität der Abbildung (Matrix) A .

($\mathbf{R}$ = Menge der reellen Zahlen; $\mathbf{R}^2$ = Menge der zweidimensionalen reellen Vektoren)