

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

### > Newtonverfahren

**Aufgabe:** Bestimme mit Hilfe des Newtonverfahrens die Nullstelle der Funktion:

$$f(x) = x + 3 - \sinh x .$$

Der Startwert sei  $x_0 = 2,5$ .

**Lösung:** I. Allgemein gilt: Zu einer differenzierbaren Funktion  $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$  bestimmt man numerisch eine Nullstelle  $x_N$  mit  $f(x_N) = 0$ , indem man das Newtonverfahren anwendet, das für einen vorgegebenen (Anfangs-) Wert die Funktion  $f(x)$  durch eine Tangente annähert, die Nullstelle der Tangente bestimmt und dieses Verfahren wiederholt (Iteration). Es entsteht dadurch eine Folge von reellen  $x$ -Werten  $x_0$  (Anfangswert),  $x_1, x_2, \dots$  vermöge der Iterationsgleichung (für  $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

( $f'(x_n) \neq 0$ ). Die Folge  $x_1, x_2, \dots$  konvergiert dann bei geeignetem Anfangswert  $x_0$  im Allgemeinen gegen die gesuchte Nullstelle  $x_N$  der Funktion  $f(x)$ , also  $x_n \rightarrow x_N$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Der Anfangswert  $x_0$  ergibt sich dabei z.B. als Wert in einem Intervall  $[a; b]$  mit Vorzeichenwechsel der Funktion, also mit  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (d.h.:  $f(a) > 0, f(b) < 0$  oder  $f(a) < 0, f(b) > 0$ ). Stellen mit  $f'(x) = 0$  (waagerechte Tangenten bei der Funktion  $f(x)$ ) beeinflussen die Iteration des Newtonverfahrens negativ, das Newtonverfahren kann divergent werden.

II. Wegen  $(\sinh x)' = \cosh x$  folgt aus:  $f(x) = x + 3 - \sinh x$  die Ableitung:

$$f'(x) = 1 - \cosh x .$$

Es ergibt sich damit die Iterationsvorschrift:

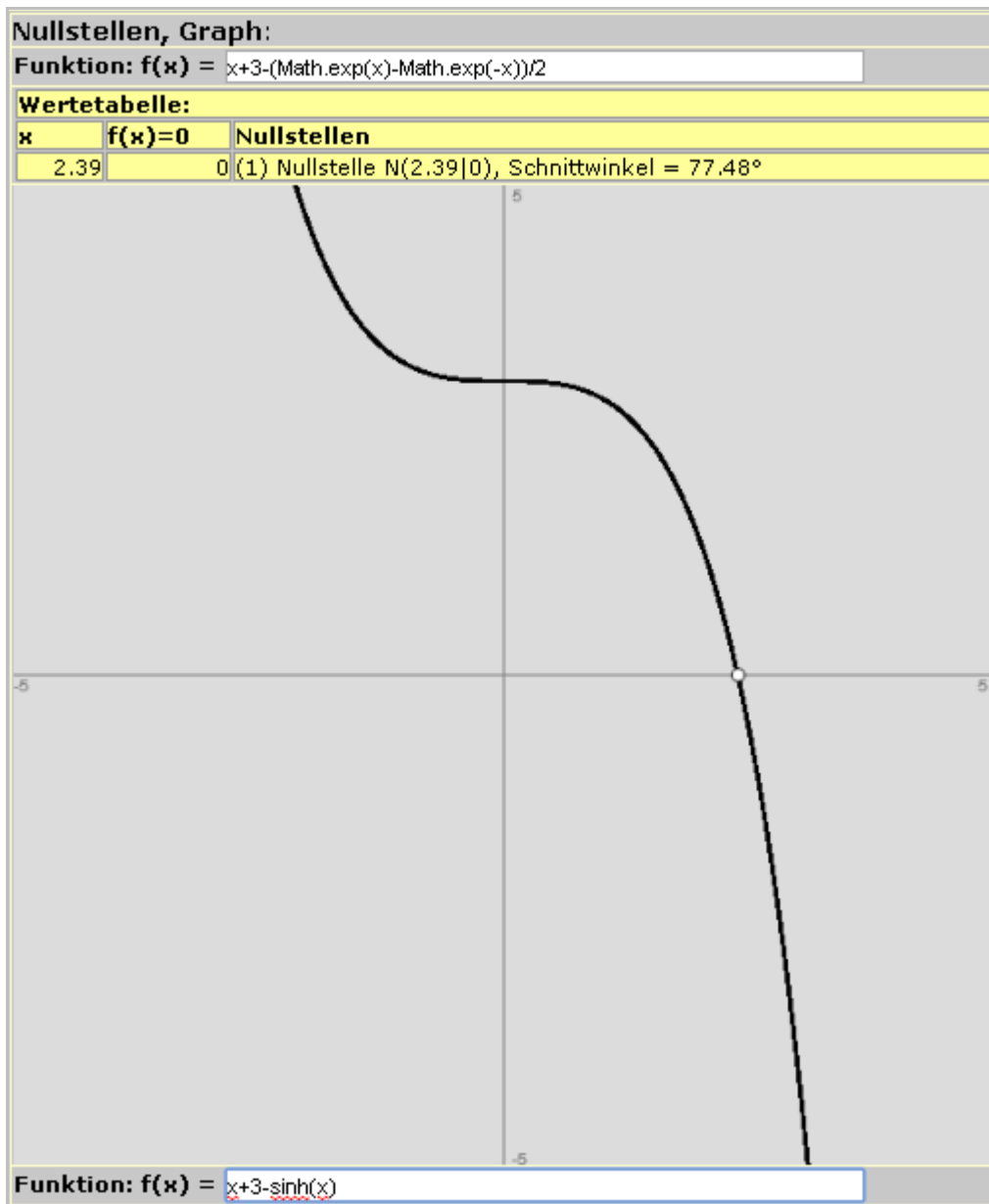
$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} + 3 - \sinh x_{n-1}}{1 - \cosh x_{n-1}}$$

für  $n = 1, 2, \dots$

III. Wir führen das Newtonverfahren durch mit:  $f(x) = x + 3 - \sinh(x)$ ,  $f'(x) = 1 - \cosh(x)$ ,  $x_0 = 2,5$ . Es ergibt sich die Rechentabelle:

Iteration $n =$	$x_{n-1} =$	$f(x_{n-1}) =$	$f'(x_{n-1}) =$	$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	Nullstelle
1	2.5	-3.520204481039787	-5.132289479663685	1.8141064051456304	
2	1.8141064051456304	1.827802650164374	-2.1492872395218496	2.6645291018211124	
3	2.6645291018211124	-1.481247479190075	-6.215408716471156	2.426210505770511	
4	2.426210505770511	-0.18756351258047488	-4.702145098917825	2.3863215809001064	
5	2.3863215809001064	-0.004406381636119505	-4.482695319463773	2.385338604962173	
6	2.385338604962173	-0.00000260350536684939	-4.477399011539932	2.3853380234849895	
7	2.3853380234849895	-9.103828801926284e-13	-4.477395880087818	2.385338023484786	
					<b><math>f(2.385338023484786) = 0</math></b>

Graphisch stellt sich die Nullstelle der Funktion  $f(x) = x + 3 - \sinh x$  wie folgt dar:



www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 252