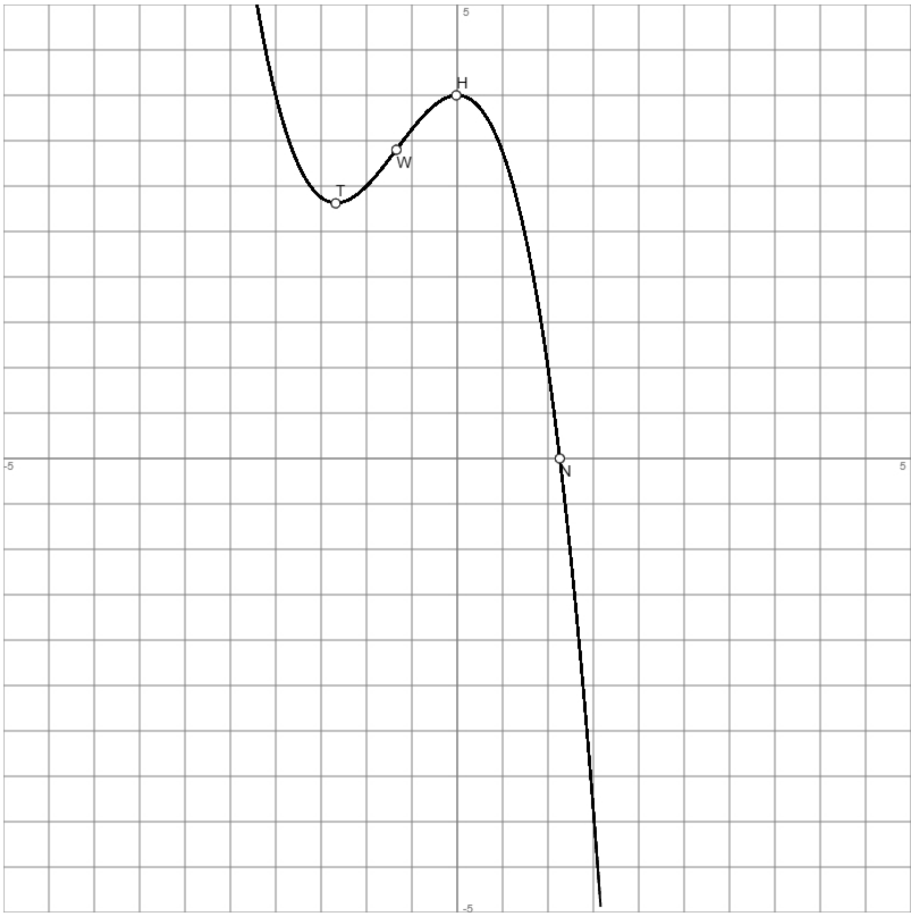
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Nullstellenbestimmung

Aufgabe: Bestimme die (einzige) Nullstelle der ganz rationalen Funktion:

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4$$

auf dem Intervall [0; 2].



1. Lösung: I. Eine Nullstelle x_0 einer stetigen Funktion f(x) findet sich in einem Intervall [a; b] mit f(a)f(b) < 0, also mit Vorzeichenwechsel. Das Verfahren der Intervallschachtelung (Intervallschachtelungsverfahren) wertet dieses Intervall zunächst in 0.1- (bzw. kleineren Schritten von 10er-Potenzen) aus. Findet sich ein Teilintervall mit Vorzeichenwechsel, in dem also x_0 liegt, so wird dieses in 0,01-Schritten ausgewertet usw.

II. Es ist f(0) = 4 und f(2) = -12, so dass auf dem Intervall [0; 2] die Funktion $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4$ einen Vorzeichenwechsel hat und wegen der Stetigkeit der ganz rationalen Funktion es in diesem Intervall (mindestens) eine Nullstelle x_0 gibt.
Wir wollen diese Nullstelle auf vier Stellen hinter dem Komma genau bestimmen und erhalten nachstehend eine Abfolge von Wertetabellen auf Teilintervallen des Intervalls [0; 2], die sich durch einen Vorzeichenwechsel auszeichnen (Intervallschachtelung):

Intervall [0; 2]	
x	f(x)
0	4
0.1	3.979
0.2	3.912
0.3	3.793
0.4	3.616
0.5	3.375
0.6	3.064
0.7	2.677
0.8	2.208
0.9	1.651
1	1
1.1	0.249
1.2	-0.608
1.3	-1.577
1.4	-2.664
1.5	-3.875
1.6	-5.216
1.7	-6.693
1.8	-8.312
1.9	-10.079
2	-12

Intervall [1.1; 1.2]	
x	f(x)
1.1	0.249
1.11	0.168169
1.12	0.086272
1.13	0.003303
1.14	-0.080744
1.15	-0.165875
1.16	-0.252096
1.17	-0.339413
1.18	-0.427832
1.19	-0.517359
1.2	-0.608

Intervall [1.13; 1.14]	
x	f(x)
1.13	0.003303
1.131	-0.00505309
1.132	-0.01341997
1.133	-0.02179764
1.134	-0.0301861
1.135	-0.03858537
1.136	-0.04699546
1.137	-0.05541635
1.138	-0.06384807
1.139	-0.07229062
1.14	-0.080744

Intervall [1.13; 1.131]	
x	f(x)
1.130	0.003303
1.1301	0.00246788
1.1302	0.00163264
1.1303	0.0007973
1.1304	-0.00003814
1.1305	-0.0008737
1.1306	-0.00170936
1.1307	-0.00254513
1.1308	-0.00338101
1.1309	-0.004217
1.131	-0.00505309

Als Nullstelle ergibt sich also in Näherung: x_0 = 1.1304.

2. Lösung: I. Eine Nullstelle x_0 einer stetigen Funktion f(x) findet sich in einem Intervall [a; b] mit f(a)f(b) < 0. Das Verfahren der Intervallhalbierung (Intervallhalbierungsverfahren) unterteilt dieses Intervall vermöge der Intervallmitte m = (a+b)/2 in eine linke Intervallhälfte [a; m] und eine rechte Intervallhälfte [m; b]. Ist dann f(m)f(b) < 0, so liegt x_0 in der rechten Intervallhälfte [m; b]; ist f(a)f(m) < 0, so liegt x_N in der linken Intervallhälfte [a; m]. Das Verfahren der Intervallhalbierung kann dann für die Intervallhälfte [a; m] bzw. [m; b] wiederholt werden, in der x_0 liegt. Man erhält eine Folge von ineinander geschachtelten Intervallen (Intervallschachtelung), die auf den Dezimalwert von x_0 führt.

II. Es ist f(0) = 4 und f(2) = -12, so dass auf dem Intervall [0; 2] die Funktion $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4$ einen Vorzeichenwechsel hat und wegen der Stetigkeit der ganz rationalen Funktion es in diesem Intervall (mindestens) eine Nullstelle x_0 gibt.
Wir gehen nach dem Intervallhalbierungsverfahren (auch eine Intervallschachtelung) vor und haben nach 16 Intervallhalbierungen:

Schritt	**Linkes Intervall**	**Rechtes Intervall**	**Intervallmitte, Intervallauswahl** (Intervallmitte -> Vorzeichenwechsel -> [linke, rechte] Intervallhälfte)
	$x_0 \in [0; 2]$		1 -> f(0)=4, f(1)=1, f(2)=-12 -> rechte Intervallhälfte [1; 2]

1	[0; 1]	x_0∈[1; 2]	1.5 -> f(1)=1, f(1.5)=-3.875, f(2)=-12 -> linke Intervallhälfte [1; 1.5]
2	x_0∈[1; 1.5]	[1.5; 2]	1.25 -> f(1)=1, f(1.25)=-1.078125, f(1.5)=-3.875 -> linke Intervallhälfte [1; 1.25]
3	x_0∈[1; 1.25]	[1.25; 1.5]	1.125 -> f(1)=1, f(1.125)=0.044921875, f(1.25)=-1.078125 -> rechte Intervallhälfte [1.125; 1.25]
4	[1; 1.125]	x_0∈[1.125; 1.25]	1.1875 -> f(1.125)=0.044921875, f(1.1875)=-0.494873046875, f(1.25)=-1.078125 -> linke Intervallhälfte [1.125; 1.1875]
5	x_0∈[1.125; 1.1875]	[1.1875; 1.25]	1.15625 -> f(1.125)=0.044921875, f(1.15625)=-0.219635009765625, f(1.1875)=-0.494873046875 -> linke Intervallhälfte [1.125; 1.15625]
6	x_0∈[1.125; 1.15625]	[1.15625; 1.1875]	1.140625 -> f(1.125)=0.044921875, f(1.140625)=-0.08603286743164062, f(1.15625)=-0.219635009765625 -> linke Intervallhälfte [1.125; 1.140625]
7	x_0∈[1.125; 1.140625]	[1.140625; 1.15625]	1.1328125 -> f(1.125)=0.044921875, f(1.1328125)=-0.020226001739501953, f(1.140625)=-0.08603286743164062 -> linke Intervallhälfte [1.125; 1.1328125]
8	x_0∈[1.125; 1.1328125]	[1.1328125; 1.140625]	1.12890625 -> f(1.125)=0.044921875, f(1.12890625)=0.012430131435394287, f(1.1328125)=-0.020226001739501953 -> rechte Intervallhälfte [1.12890625; 1.1328125]
9	[1.125; 1.12890625]	x_0∈[1.12890625; 1.1328125]	1.130859375 -> f(1.12890625)=0.012430131435394287, f(1.130859375)=-0.0038773640990257263, f(1.1328125)=-0.020226001739501953 -> linke Intervallhälfte [1.12890625; 1.130859375]
10	x_0∈[1.12890625; 1.130859375]	[1.130859375; 1.1328125]	1.1298828125 -> f(1.12890625)=0.012430131435394287, f(1.1298828125)=0.004281523637473583, f(1.130859375)=-0.0038773640990257263 -> rechte Intervallhälfte [1.1298828125; 1.130859375]
11	[1.12890625; 1.1298828125]	x_0∈[1.1298828125; 1.130859375]	1.13037109375 -> f(1.1298828125)=0.004281523637473583, f(1.13037109375)=0.00020336511079221964, f(1.130859375)=-0.0038773640990257263 -> rechte Intervallhälfte [1.13037109375; 1.130859375]
12	[1.1298828125; 1.13037109375]	x_0∈[1.13037109375; 1.130859375]	1.130615234375 -> f(1.13037109375)=0.00020336511079221964, f(1.130615234375)=-0.0018366781150689349, f(1.130859375)=-0.0038773640990257263 -> linke Intervallhälfte [1.13037109375; 1.130615234375]
13	x_0∈[1.13037109375; 1.130615234375]	[1.130615234375; 1.130859375]	1.1304931640625 -> f(1.13037109375)=0.00020336511079221964, f(1.1304931640625)=-0.0008165761628333712, f(1.130615234375)=-0.0018366781150689349 -> linke Intervallhälfte [1.13037109375; 1.1304931640625]

14	$x_0 \in$[1.13037109375; 1.1304931640625]	[1.1304931640625; 1.130615234375]	1.13043212890625 -> f(1.13037109375)=0.00020336511079221964, f(1.13043212890625)=-0.0003065854418764502, f(1.1304931640625)=-0.0008165761628333712 -> linke Intervallhälfte [1.13037109375; 1.13043212890625]
15	$x_0 \in$[1.13037109375; 1.13043212890625]	[1.13043212890625; 1.1304931640625]	1.130401611328125 -> f(1.13037109375)=0.00020336511079221964, f(1.130401611328125)=-0.00005160514459134902, f(1.13043212890625)=-0.0003065854418764502 -> linke Intervallhälfte [1.13037109375; 1.130401611328125]
16	$x_0 \in$[1.13037109375; 1.130401611328125]	[1.130401611328125; 1.13043212890625]	1.1303863525390625 -> f(1.13037109375)=0.00020336511079221964, f(1.1303863525390625)=0.00007588123832746874, f(1.130401611328125)=-0.00005160514459134902 -> rechte Intervallhälfte [1.1303863525390625; 1.130401611328125]

Die Nullstelle liegt damit im Bereich: 1.13037109375 ≤ x_0 ≤ 1.130401611328125 und kann mit einer Genauigkeit von vier Stellen hinter dem Komma als: x_0 = 1,1304 bestimmt werden.

3. Lösung: I. Allgemein gilt: Zu einer differenzierbaren Funktion f: D_f -> **R** bestimmt man numerisch eine Nullstelle x_N mit $f(x_N) = 0$, indem man das Newtonverfahren anwendet, das für einen vorgegebenen (Anfangs-) Wert die Funktion f(x) durch eine Tangente annähert, die Nullstelle der Tangente bestimmt und dieses Verfahren wiederholt (Iteration). Es entsteht dadurch eine Folge von reellen x-Werten x_0 (Anfangswert), x_1, x_2, … vermöge der Iterationsgleichung (für n = 0, 1, 2, …):

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

($f'(x_n) \neq 0$). Die Folge x_1, x_2, … konvergiert dann bei geeignetem Anfangswert x_0 im Allgemeinen gegen die gesuchte Nullstelle x_N der Funktion f(x), also $x_n \to x_N$ ($n \to \infty$). Der Anfangswert x_0 ergibt sich dabei z.B. als Wert in einem Intervall [a;b] mit Vorzeichenwechsel der Funktion, also mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h.: f(a)>0, f(b)<0 oder f(a)<0, f(b)>0). Stellen mit f'(x) = 0 (waagerechte Tangenten bei der Funktion f(x)) beeinflussen die Iteration des Newtonverfahrens negativ, das Newtonverfahren kann divergent werden.

II. Für die Funktion $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4$ ergibt sich als 1. Ableitung:

$f(x) = -3x^2 - 4x$.

Es ergibt sich damit die Iterationsvorschrift:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{-x_{n-1}^3 - 2x_{n-1}^2 + 4}{-3x_{n-1}^2 - 4x_{n-1}}$$

für n = 1, 2, …

III. Es ist f(0) = 4 und f(2) = -12, so dass auf dem Intervall [0; 2] die Funktion $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4$ einen Vorzeichenwechsel hat und wegen der Stetigkeit der ganz rationalen Funktion es in diesem Intervall (mindestens) eine Nullstelle x_0 gibt. Wir führen das Newtonverfahren durch mit Anfangswert x_0 = 1 als Intervallmitte. Es ergibt sich die Rechentabelle:

Iteration n =	x_{n-1} =	$f(x_{n-1})$ =	$f'(x_{n-1})$ =	$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$	**Nullstelle**
1	1	1	-7	1.1428571428571428	
2	1.1428571428571428	-0.10495626822157433	-8.489795918367346	1.1304945054945055	
3	1.1304945054945055	-0.0008277852012286147	-8.356031502837821	1.1303954411000081	
4	1.1303954411000081	-5.2909721048877145e-8	-8.354963324179078	1.1303954347672789	

5	1.1303954347672789	-8.881784197001252e-16	-8.354963255897232	1.1303954347672789	
					f(1.1303954347672789) = 0

Die Nullstelle bestimmt sich gerundet auf vier Stellen hinter dem Komma als: x_0 = 1,1304.

www.michael-buhlmann.de / 04.2023 / Aufgabe 1832