Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Normalen

Aufgabe: Berechne die Gleichung der Normale an die Funktion f(x) an der Stelle x_0:

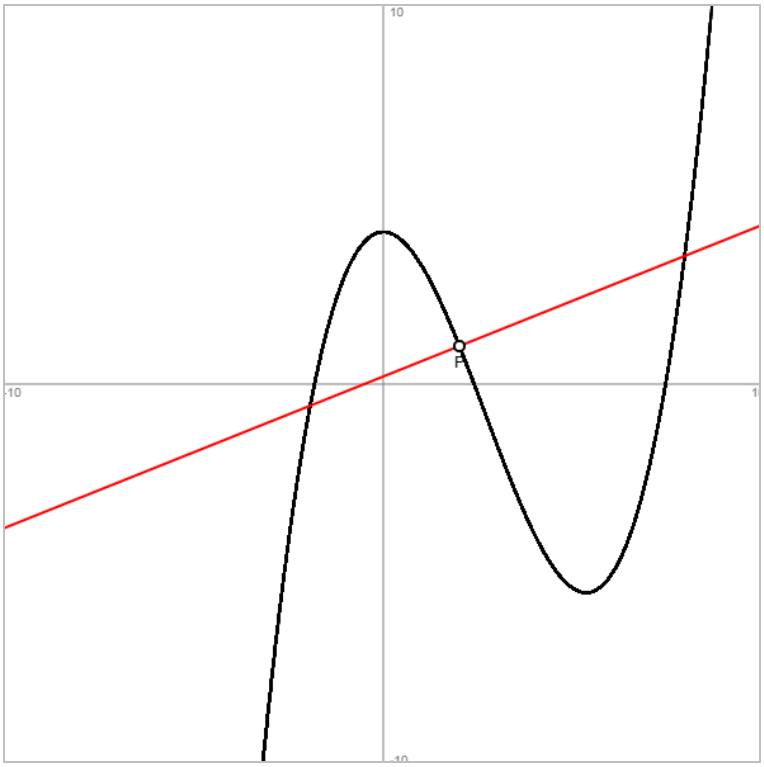
$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 4,\ x_0 = 2.$$

1. Lösung (mit der Geradengleichung): I. Allgemein gilt für die gesuchte Normale an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung y = mx + c; m ist dann die Normalensteigung $m = -1/f'(x_0)$, c der y-Achsenabschnitt der Tangente u.a. mit $c = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$.

II. Aus $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 4$ erhalten wir mit Summen-, Faktor- und Potenzregel die Ableitungsfunktion $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2x$. Wir benötigen: $f(2) = \frac{1}{8}\cdot 2^3 - 2^2 + 4 = 1$ und: $f'(2) = \frac{3}{8}\cdot 2^2 - 2\cdot 2 = -2{,}5$ wegen der vorgegebenen Stelle $x_0 = 2$, daneben die Geradengleichung der Normale n: y = mx + c. Es gilt weiter: m = -1/f'(2) = -1/(-2,5) = 0,4, so dass n: y = 0,4x + c gilt. Wegen f(2) = 1 wird die Normale im auf dem Graphen von f(x) befindlichen Punkt P(2|1) errechnet. Punktprobe mit x=2 und y=1 ergibt mit dem Einsetzen in die Geradengleichung den Wert für den y-Achsenabschnitt c:

$1 = 0{,}4\cdot 2 + c \Leftrightarrow 1 = 0{,}8 + c \Leftrightarrow 0{,}2 = c$.

Die gesuchte <u>Normalengleichung</u> lautet also: n: y = 0,4x + 0,2.



2. Lösung (mit der Normalenformel): I. Allgemein gilt die Formel der Normalengleichung:

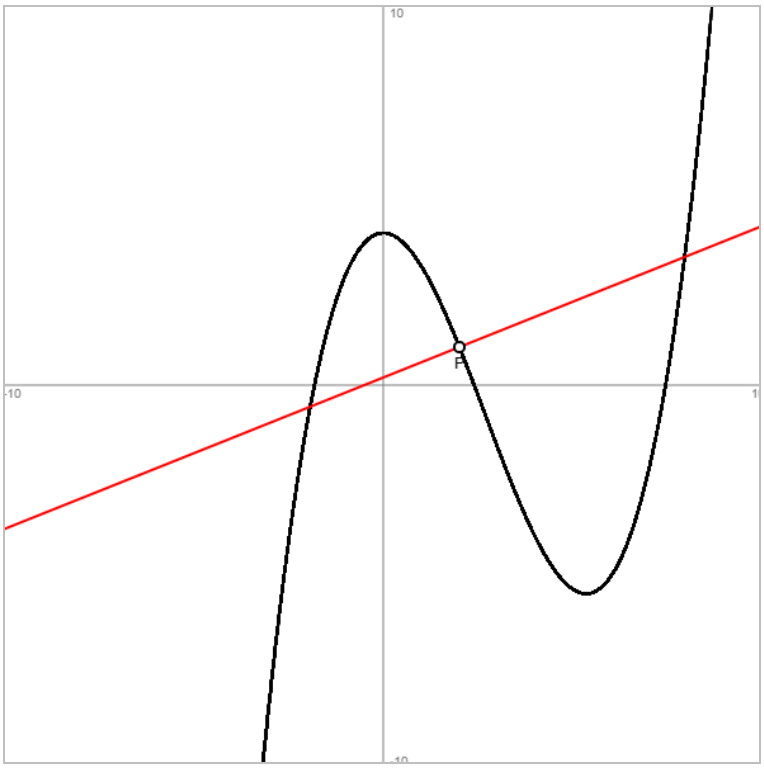
n: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$

mit Funktion f(x), Ableitungsfunktion f'(x) und n als Normale an die Funktion f(x) an der Stelle x_0.

II. Wir berechnen aus Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 4$ und Ableitung $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2x$ die Werte:

$f(2) = \frac{1}{8} \cdot 2^3 - 2^2 + 4 = 1$, $f'(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -2{,}5$ für $x_0 = 2$. Die Normale an die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ lautet mittels Einsetzen von f(2) und f'(2) in die Formel der Normalengleichung:

n: $y = -\frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2) = -\frac{1}{-2{,}5}(x-2) + 1 = 0{,}4(x-2) + 1 = 0{,}4x - 0{,}8 + 1 = 0{,}4x + 0{,}2$.



www.michael-buhlmann.de / 03.2023 / Aufgabe 1825