

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Normalen

Aufgabe: Berechne die Gleichung der Normale an die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 :

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 4, \quad x_0 = 2.$$

1. Lösung (mit der Geradengleichung): I. Allgemein gilt für die gesuchte Normale an der Stelle x_0 bzw. im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ die Geradengleichung $y = mx + c$; m ist dann die Normalensteigung $m = -1/f'(x_0)$, c der y -Achsenabschnitt der Tangente u.a. mit $c = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

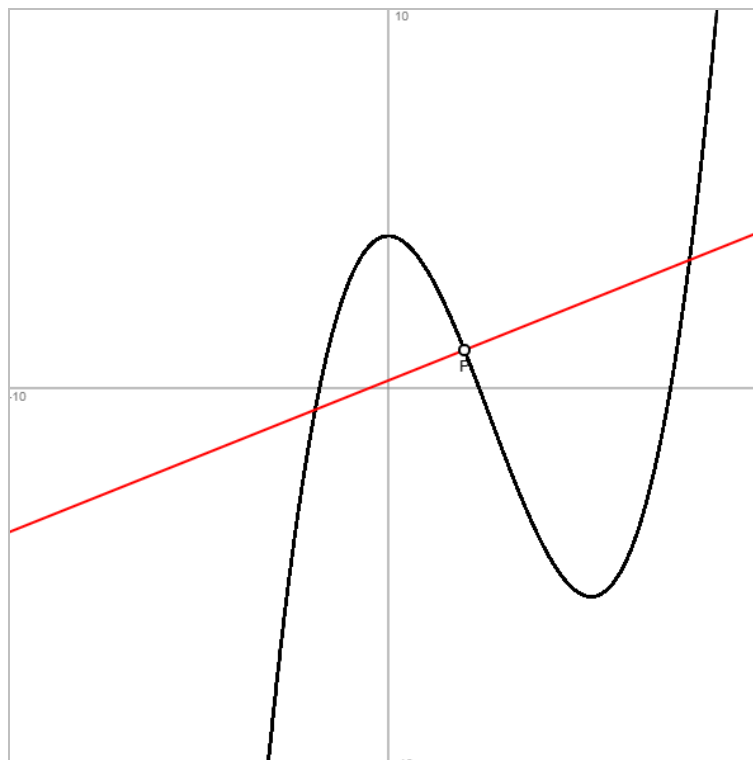
II. Aus $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 4$ erhalten wir mit Summen-, Faktor- und Potenzregel die Ableitungsfunktion

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2x$. Wir benötigen: $f(2) = \frac{1}{8} \cdot 2^3 - 2^2 + 4 = 1$ und: $f'(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -2,5$ we-

gen der vorgegebenen Stelle $x_0 = 2$, daneben die Geradengleichung der Normale n : $y = mx + c$. Es gilt weiter: $m = -1/f'(2) = -1/(-2,5) = 0,4$, so dass n : $y = 0,4x + c$ gilt. Wegen $f(2) = 1$ wird die Normale im auf dem Graphen von $f(x)$ befindlichen Punkt $P(2|1)$ errechnet. Punktprobe mit $x=2$ und $y=1$ ergibt mit dem Einsetzen in die Geradengleichung den Wert für den y -Achsenabschnitt c :

$$1 = 0,4 \cdot 2 + c \Leftrightarrow 1 = 0,8 + c \Leftrightarrow 0,2 = c.$$

Die gesuchte Normalengleichung lautet also: n : $y = 0,4x + 0,2$.



2. Lösung (mit der Normalenformel): I. Allgemein gilt die Formel der Normalengleichung:

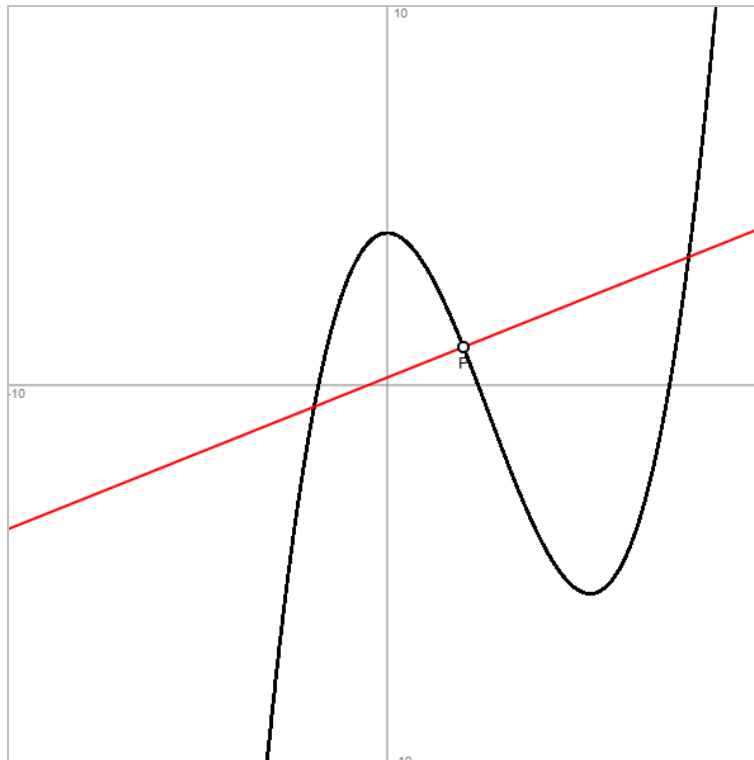
$$n: y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

mit Funktion $f(x)$, Ableitungsfunktion $f'(x)$ und n als Normalee an die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 .

II. Wir berechnen aus Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 4$ und Ableitung $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2x$ die Werte:

$f(2) = \frac{1}{8} \cdot 2^3 - 2^2 + 4 = 1$, $f'(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -2,5$ für $x_0 = 2$. Die Normale an die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$ lautet mittels Einsetzen von $f(2)$ und $f'(2)$ in die Formel der Normalengleichung:

$$n: y = -\frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2) = -\frac{1}{-2,5}(x-2) + 1 = 0,4(x-2) + 1 = 0,4x - 0,8 + 1 = 0,4x + 0,2.$$



www.michael-buhlmann.de / 03.2023 / Aufgabe 1825