Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Nullstellen, Extrem-, Wendepunkte

Aufgabe: Die Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^{-x} + x$$

ist auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte zu untersuchen.

Lösung: I. a) Nullstellen als Schnittpunkte einer Funktion f(x) mit der x-Achse des x-y-Koordinatensystems errechnen sich vermöge:

$f(x) = 0$ -> x_1, x_2, … -> $N(x_1|0)$, $N(x_2|0)$, …

(Gleichungen [und das Lösen von Gleichungen] sind u.a. Polynomgleichungen [lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen und a-b-c-Formel, Ausklammern und Satz vom Nullprodukt, Substitution $z = x^2$ u.ä.], Bruchgleichungen [Multiplikation mit dem Hauptnenner], Potenzgleichungen [Radizieren], Exponentialgleichungen [Logarithmieren], Logarithmengleichungen [Exponieren], trigonometrische Gleichungen [Umstellen nach Sinus oder Kosinus, {unendlich viele} Lösungen entsprechend der Periodizität].)

b) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

$f'(x) = 0$ => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1) > 0$ => relatives Minimum/Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$
$f''(x_1) < 0$ => relatives Maximum/Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f'(x) = 0$ => x_1, … als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'(x_1-h)<0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)>0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)>0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)<0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung).

c) Bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Wendepunkte ist folgendermaßen vorzugehen:

$f''(x) = 0$ => x_1, … als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'''(x_1) > 0$ => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
$f'''(x_1) < 0$ => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f''(x) = 0$ => x_1, … als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1-h)<0$, $f''(x_1)=0$, $f''(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
$f''(x_1-h)>0$, $f''(x_1)=0$, $f''(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung).

Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente.

II. Wir berechnen die 1., 2. (und 3.) Ableitung der Funktion $f(x) = e^{-x} + x$ (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel für Exponentialfunktionen):

$f'(x) = -e^{-x} + 1$

$f''(x) = e^{-x}$

$[f'''(x) = -e^{-x}]$.

III. Hoch-, Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(1) = 0 = -x \Leftrightarrow x = 0$,

so dass x=0 die Stelle ist, an der die Funktion f(x) eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=0 in die 2. Ableitung (hinreichende Bedingung) ergibt dann:

$f''(0) = e^{-0} = 1 > 0$

so dass ein Tiefpunkt vorliegt. Der Funktionswert des Tiefpunkts errechnet sich als:

$f(0) = e^{-0} + 1 = 1$.

Die Funktion f(x) besitzt damit den Tiefpunkt T(0|1).

IV. Wendepunkte: Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichung:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$,

die keine Lösung besitzt. Die Funktion f(x) verfügt also über keine Wendepunkte.

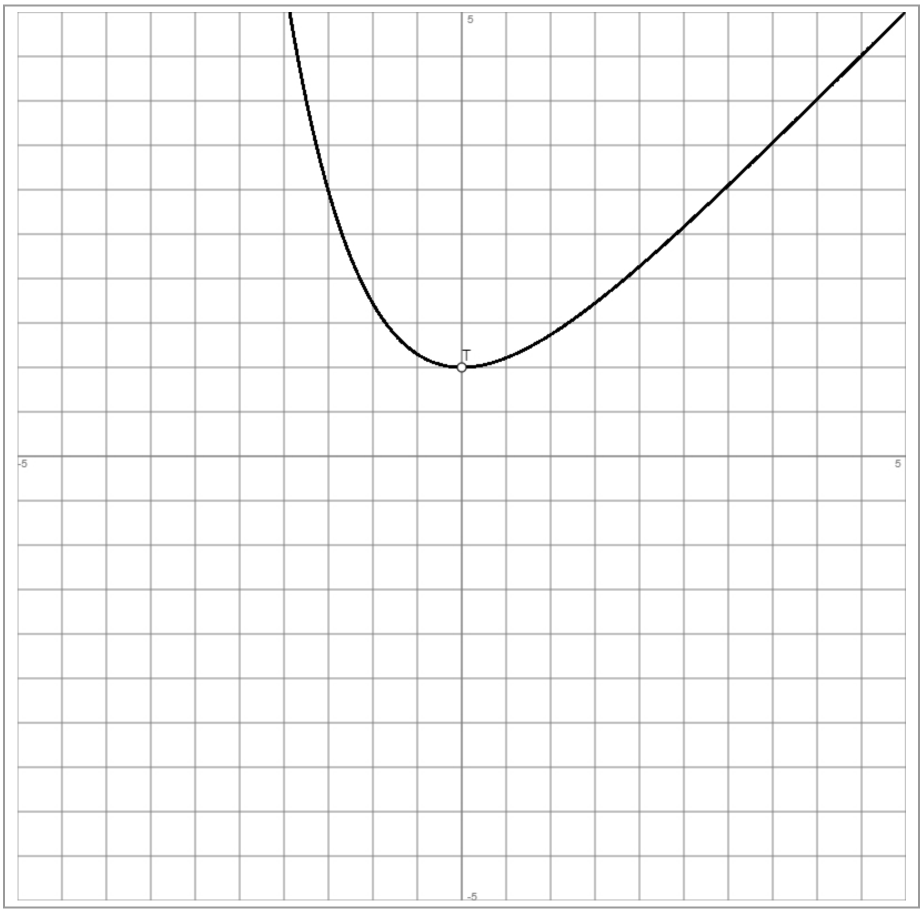
V. Gemäß III. haben wir den Tiefpunkt T(0|1) der Funktion f(x) erhalten. Der Tiefpunkt liegt im x-y-Koordinatensystem oberhalb der x-Achse und ist ein globales Minimum von f(x), d.h.: f(x) ≥ 1 für alle reellen x. Daher besitzt die Funktion $f(x) = e^{-x} + x$ keine Nullstellen.

VI. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	143.4132	-147.42	148.41	
-4.5	85.5171	-89.02	90.02	
-4	50.5982	-53.6	54.6	
-3.5	29.6155	-32.12	33.12	
-3	17.0855	-19.09	20.09	
-2.5	9.6825	-11.18	12.18	
-2	5.3891	-6.39	7.39	
-1.5	2.9817	-3.48	4.48	
-1	1.7183	-1.72	2.72	
-0.5	1.1487	-0.65	1.65	
0	1	0	1	Schnittpunkt S_y(0|1) = Tiefpunkt T(0|1)
0.5	1.1065	0.39	0.61	
1	1.3679	0.63	0.37	
1.5	1.7231	0.78	0.22	
2	2.1353	0.86	0.14	
2.5	2.5821	0.92	0.08	
3	3.0498	0.95	0.05	
3.5	3.5302	0.97	0.03	

4	4.0183	0.98	0.02	
4.5	4.5111	0.99	0.01	
5	5.0067	0.99	0.01	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 02.2024 / Aufgabe 2001