Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Nullstellen, Extrem-, Wendepunkte

Aufgabe: Die Exponentialfunktion:

$$f(x) = 2e^x - 4x$$

ist auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte zu untersuchen.

Lösung: I. a) Nullstellen als Schnittpunkte einer Funktion f(x) mit der x-Achse des x-y-Koordinatensystems errechnen sich vermöge:

$f(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \ldots \rightarrow N(x_1|0), N(x_2|0), \ldots$

(Gleichungen [und das Lösen von Gleichungen] sind u.a. Polynomgleichungen [lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen und a-b-c-Formel, Ausklammern und Satz vom Nullprodukt, Substitution $z = x^2$ u.ä.], Bruchgleichungen [Multiplikation mit dem Hauptnenner], Potenzgleichungen [Radizieren], Exponentialgleichungen [Logarithmieren], Logarithmengleichungen [Exponieren], trigonometrische Gleichungen [Umstellen nach Sinus oder Kosinus, {unendlich viele} Lösungen entsprechend der Periodizität].)

b) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, \ldots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1) > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum/Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$
$f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum/Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, \ldots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'(x_1-h)<0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)>0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)>0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)<0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung).

c) Bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Wendepunkte ist folgendermaßen vorzugehen:

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1, \ldots$ als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'''(x_1) > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
$f'''(x_1) < 0 \Rightarrow$ Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1, \ldots$ als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1-h)<0$, $f''(x_1)=0$, $f''(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
$f''(x_1-h)>0$, $f''(x_1)=0$, $f''(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung).

Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente.

II. Wir berechnen die 1., 2. (und 3.) Ableitung der Funktion $f(x)=2e^x-4x$ (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel für Exponentialfunktionen):

$f'(x)=2e^x-4$

$f''(x)=2e^x$

[$f'''(x)=2e^x$].

III. Hoch-, Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x-4=0 \Leftrightarrow 2e^x=4 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln(2),$$

so dass x=ln(2) die Stelle ist, an der die Funktion f(x) eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=ln(2) in die 2. Ableitung (hinreichende Bedingung) ergibt dann:

$$f''(\ln(2))=2e^{\ln(2)}=2\cdot 2=4>0$$

so dass ein Tiefpunkt vorliegt. Der Funktionswert des Tiefpunkts errechnet sich als:

$$f(\ln(2))=2e^{\ln(2)}-4\ln(2)=4-4\ln(2)=4\cdot(1-\ln(2)).$$

Die Funktion f(x) besitzt damit den Tiefpunkt T(ln(2)|4·(1-ln(2))).

IV. Wendepunkte: Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichung:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x=0 \Leftrightarrow e^x=0,$$

die keine Lösung besitzt. Die Funktion f(x) verfügt also über keine Wendepunkte.

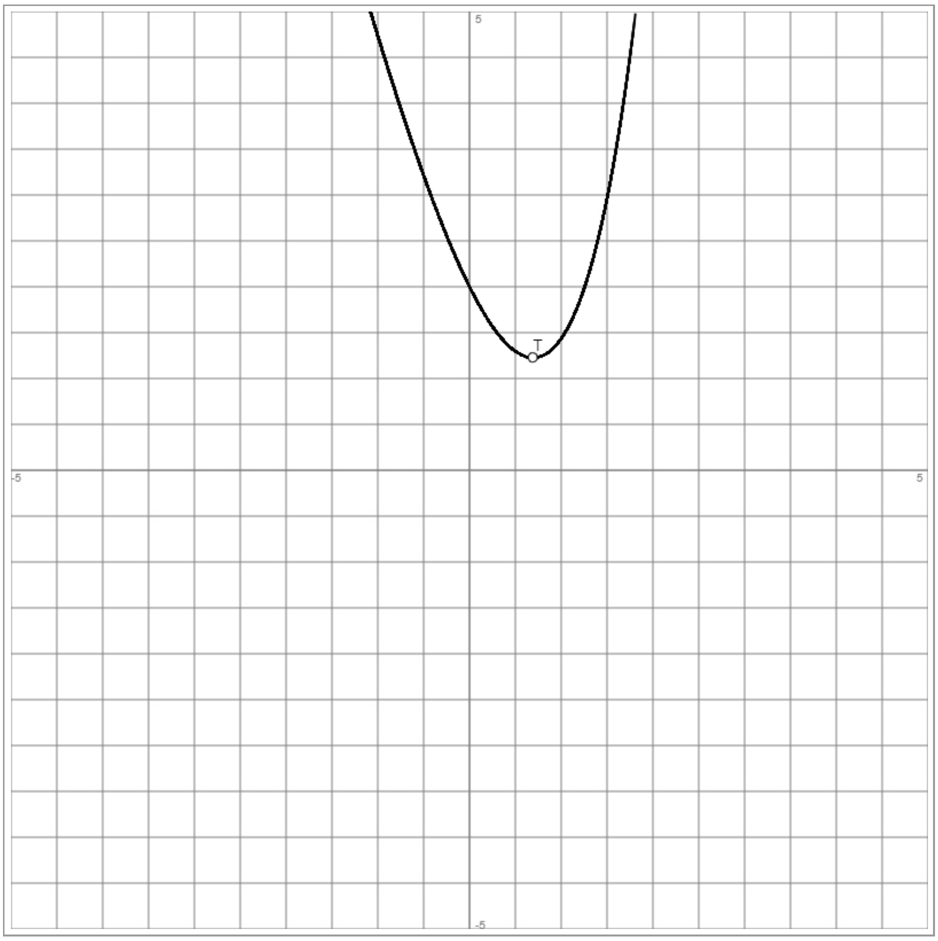
V. Gemäß III. haben wir den Tiefpunkt T(ln(2)|4·(1-ln(2))) der Funktion f(x) erhalten. Der Tiefpunkt liegt im x-y-Koordinatensystem oberhalb der x-Achse wegen 4·(1-ln(2)) > 0 und ist ein globales Minimum von f(x), d.h.: f(x) ≥ 4·(1-ln(2)) für alle reellen x. Daher besitzt die Funktion $f(x)=2e^x-4x$ keine Nullstellen.

VI. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	20.0135	-3.99	0.01	
-4.5	18.0222	-3.98	0.02	
-4	16.0366	-3.96	0.04	
-3.5	14.0604	-3.94	0.06	
-3	12.0996	-3.9	0.1	
-2.5	10.1642	-3.84	0.16	
-2	8.2707	-3.73	0.27	
-1.5	6.4463	-3.55	0.45	
-1	4.7358	-3.26	0.74	
-0.5	3.2131	-2.79	1.21	
0	2	-2	2	Schnittpunkt $S_y(0\|2)$
0.5	1.2974	-0.7	3.3	
0.69	1.2274	-0.01	3.99	Tiefpunkt T(0.69|1.23)
1	1.4366	1.44	5.44	
1.5	2.9634	4.96	8.96	
2	6.7781	10.78	14.78	
2.5	14.365	20.37	24.37	
3	28.1711	36.17	40.17	

3.5	52.2309	62.23	66.23	
4	93.1963	105.2	109.2	
4.5	162.0343	176.04	180.04	
5	276.8263	292.83	296.83	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 02.2024 / Aufgabe 2002