Michael Buhlmann

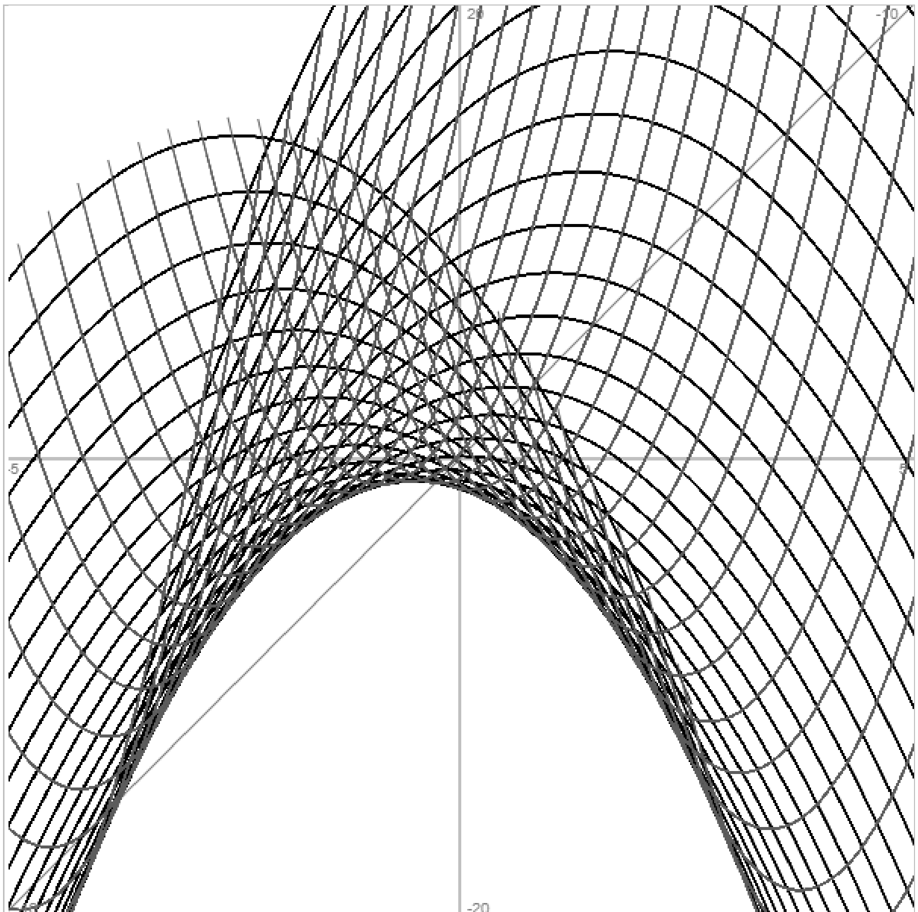
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Oberflächenintegrale

Aufgabe: Gegeben ist im dreidimensionalen reellen Raum die Oberfläche

$$S = \{(x,y,z)^T \varepsilon \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 4,\ z = x^2-y^2\}.$$

Berechne den Oberflächeninhalt.

1. Lösung: I. Wir identifizieren $z = f(x,y) = x^2-y^2$ als <u>Funktion</u> mit zwei Unbekannten x, y als Sattel im dreidimensionalen reellen Raum:



$z = f(x,y) = x^2$-y^2, -5≤x, y≤5, -20≤z≤20

II. Wegen des Bereichs $x^2+y^2 \le 4$ als Kreis im Kreismittelpunkt M(0|0) und Kreisradius r = 2 auf der x-y-Ebene bietet sich der Übergang von kartesischen zu Zylinderkoordinaten an mit:

$$x = r\cos\varphi$$

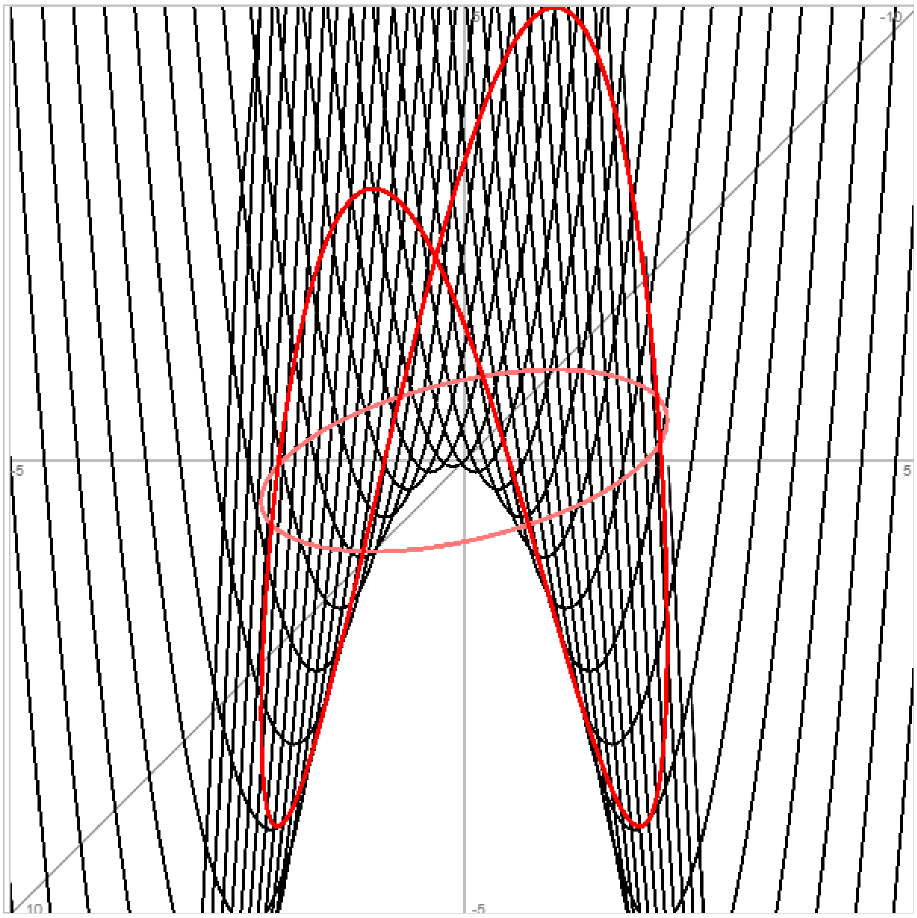
$$y = r\sin\varphi$$

$$z = (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(1-2\sin^2\varphi)$$

bei: $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Auf dem Rand des Bereichs, auf $x^2+y^2 = 4$ ergibt sich die Kurve:

$$w(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 4(1-2\sin^2\varphi) \end{pmatrix}, \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

mit umrandeter Sattel-/Oberfläche S gemäß:



III. Zur Ermittlung des Inhalts einer Oberfläche S auf einer Funktion z = f(x,y) sind die Linienelemente innerhalb der Fläche zu integrieren. Dies geschieht mit dem Oberflächenintegral $\int_S dO$ unter Verwendung der 1. partiellen Ableitungen $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ als:

$$\int_S dO = \int_{(S)} \sqrt{1+(f_x(x,y))^2+(f_y(x,y))^2}\,d(x,y)$$

und einer eventuellen Transformation des Integrals z.B. in Zylinderkoordinaten.

IV. Zu $z = f(x,y) = x^2-y^2$ bilden wir die 1. partiellen Ableitungen $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = -2y$ und haben zur Oberfläche $S = \{(x,y,z)^T \varepsilon \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 4, z = x^2-y^2\}$ das Oberflächenintegral:

$$\int_S dO = \int_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{1+(2x)^2+(-2y)^2}\,d(x,y) = \int_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,d(x,y) = (*).$$

Zum Bereich $x^2+y^2 \le 4$ bietet sich eine Transformation in Zylinderkoordinaten an mit:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

bei: 0≤r≤2, 0≤φ≤2π. Das Integral (*) wird zu:

$$(*) = \int_0^2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4(r\cos\varphi)^2+4(r\sin\varphi)^2}\,d\varphi r dr = \int_0^2\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2\cos^2\varphi+4r^2\sin^2\varphi}\,d\varphi dr$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\,d\varphi dr = \int_0^2\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\,d\varphi dr = \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\int_0^{2\pi} d\varphi dr$$

$$= \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\int_0^{2\pi} d\varphi dr = \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\cdot[\varphi]_0^{2\pi}\,dr == \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\cdot(2\pi-0)dr =$$

$$2\pi\int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr \underset{\left\{\substack{s=r^2\\ \frac{ds}{2}=rdr}\right\}}{=} 2\pi\int_0^4\frac{1}{2}\sqrt{1+4s}\,ds = \pi\int_0^4(1+4s)^{\frac{1}{2}}ds = \pi\left[\frac{2}{3}(1+4s)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{4}\right]_0^4 = \frac{1}{6}\pi\left[(1+4s)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

Der Oberflächeninhalt beträgt damit: O ≈ 36,18 FE.

2. Lösung: I. Allgemein gilt: Eine explizit vorgegebene Funktion f: $\mathbf{R}^2$ -> **R** mit: (x,y) -> f(x,y) = z geht durch Transformation von kartesischen in Zylinderkoordinaten über vermöge:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$ (*)

$z = z(r,\varphi)$

für gewisse 0≤r≤R und 0≤φ≤φ_0 sowie ein gewisse Funktion z(r,φ) = f($r\cos\varphi, r\sin\varphi$). Zur Koordinatentransformation (*) gehört die Abbildung: $\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z(r,\varphi)\end{pmatrix}$, die die zweidimensionale Parametrisierung einer Oberfläche S bewirkt. Das <u>Oberflächenintegral</u> $\int_S dO$ über der Oberfläche S wird dann zu:

$$\int_S dO = \int_0^R\int_0^{\varphi_0}\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi dr$$

mit den komponentenweise gebildeten partiellen Ableitungen:

$$\Phi_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z_r(r,\varphi)\end{pmatrix}$$

$$\Phi_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ z_\varphi(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

und den Termen:

$$E = \Phi_r(r,\varphi)\cdot\Phi_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z_r(r,\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z_r(r,\varphi) \end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + (z_r(r,\varphi))^2 = 1 + (z_r(r,\varphi))^2$$

$$F = \Phi_r(r,\varphi)\cdot\Phi_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z_r(r,\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ z_\varphi(r,\varphi) \end{pmatrix} = -r\sin\varphi\cos\varphi + r\sin\varphi\cdot\cos\varphi + z_r(r,\varphi)\cdot z_\varphi(r,\varphi)$$

$$= z_r(r,\varphi)\cdot z_\varphi(r,\varphi)$$

$$G = \Phi_\varphi(r,\varphi)\cdot\Phi_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ z_\varphi(r,\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ z_\varphi(r,\varphi) \end{pmatrix} = r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + (z_\varphi(r,\varphi))^2$$

$$= r^2 + (z_\varphi(r,\varphi))^2$$

(unter Verwendung des Skalarproduktes für die aus den partiellen Ableitungen bestehenden Vektoren).

II. Mit $z = f(x,y) = x^2-y^2$ und der Oberfläche $S = \{(x,y,z)^T \varepsilon \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 4,\ z = x^2-y^2\}$ haben wir gemäß der Transformation in Zylinderkoordinaten (siehe II.):

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(1-2\sin^2\varphi)$$

die Beziehungen:

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2(1-2\sin^2\varphi) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Phi_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r(1-2\sin^2\varphi) \end{pmatrix},\ \Phi_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ -4r^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$E = 1 + \left(2r(1-2\sin^2\varphi)\right)^2 = 1 + 4r^2(1-2\sin^2\varphi)^2,$$

$$F = 2r(1-2\sin^2\varphi)\cdot(-4r^2\sin\varphi\cos\varphi) = -8r^3\sin\varphi\cos\varphi(1-2\sin^2\varphi),$$

$$G = r^2 + \left(-4r^2\sin\varphi\cos\varphi\right)^2 = r^2 + 16r^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$EG - F^2 = \left(1+4r^2(1-2\sin^2\varphi)^2\right)\left(r^2+16r^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right) - \left(-8r^3\sin\varphi\cos\varphi(1-2\sin^2\varphi)\right)^2$$

$$= \left\{ \begin{matrix} r^2 + 16r^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 4r^4(1-2\sin^2\varphi)^2 + 64r^6\sin^2\varphi\cos^2\varphi(1-2\sin^2\varphi)^2 \\ -64r^6\sin^2\varphi\cos^2\varphi(1-2\sin^2\varphi)^2 \end{matrix} \right\}$$

$$= r^2 + 16r^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 4r^4(1-2\sin^2\varphi)^2$$

$$= r^2 + 16r^4\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi) + 4r^4(1-4\sin^2\varphi + 4\sin^4\varphi)$$

$$= r^2 + 16r^4\sin^2\varphi - 16r^4\sin^2\varphi + 4r^4 - 16r^4\sin^2\varphi + 16r^4\sin^4\varphi$$

$$= r^2 + 4r^4 \Rightarrow$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{r^2+4r^4} = \sqrt{r^2(1+4r^2)} = r\sqrt{1+4r^2}\ .$$

Das Oberflächenintegral bzw. der Oberflächeninhalt O errechnet sich aus:

$$O = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\, d\varphi dr == \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2} \cdot [\varphi]_0^{2\pi}\, dr$$

$$= \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2} \cdot (2\pi - 0) dr = 2\pi \int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\, dr \underset{\left\{ \begin{smallmatrix} s=r^2 \\ \frac{ds}{2}=rdr \end{smallmatrix} \right\}}{=} 2\pi \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{1+4s}\, ds$$

$$= \pi \int_0^4 (1+4s)^{\frac{1}{2}} ds = \pi \left[\frac{2}{3}(1+4s)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} \right]_0^4 = \frac{1}{6}\pi \left[(1+4s)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1 \right)$$

als: O ≈ 36,18 FE.

(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1451