

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Parabeln

Aufgabe: Eine nach oben geöffnete Normalparabel verläuft durch die Punkte A(-1|20) und B(3|-4). Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten Normalparabel lautet gemäß der Normalform $y = x^2 + px + q$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren) sind nach der Punktprobe der zwei vorgegebenen Parabelpunkte die Koeffizienten p und q zu bestimmen. Das Zeichnen der nach oben geöffneten Normalparabel erfolgt über eine Wertetabelle oder vom gegebenen Scheitelpunkt aus, derart dass man – vom Scheitelpunkt oder vorhergehenden Parabelpunkt ausgehend – im x - y -Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1, 3, 5, 7, ... (ungerade Zahlen aufsteigend) Längeneinheiten nach oben geht. Bei der Bestimmung des Scheitelpunkts aus der Normalform führt die quadratische Ergänzung mittels:

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

wieder auf den Scheitelpunkt $S(d|c) = S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$ und die Scheitelform der Parabelgleichung $y = (x-d)^2 + c$.

II. Hinsichtlich der Bestimmung der Normalparabel gehen wir von der (Normal-) Form $y = x^2 + px + q$ aus und erhalten wegen der Punktprobe der Punkte A(-1|20) und B(3|-4) das lineare Gleichungssystem:

$$A(-1|20) \quad (x=-1, y=20, y = x^2+px+q): 20 = (-1)^2+p(-1)+q = 1-p+q \Rightarrow 19 = -p+q \quad (1)$$

$$B(3|-4) \quad (x=3, y=-4, y = x^2+px+q): -4 = 3^2+p \cdot 3+q = 9+3p+q \Rightarrow -13 = 3p+q \quad (2)$$

Wir wenden das Additionsverfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen an und multiplizieren Gleichung (1) mit -1, so dass

$$-19 = p-q \quad (1')$$

$$-13 = 3p+q \quad (2')$$

gilt. Addition der beiden Gleichungen (1') und (2') führt zum Wegfall des Koeffizienten q . Wir erhalten:

$$-32 = 4p \Rightarrow p = -8.$$

Einsetzen von $p=-8$ etwa in Gleichung (1) führt auf:

$$19 = -(-8) + q \Rightarrow 19 = 8 + q \Rightarrow q = 11.$$

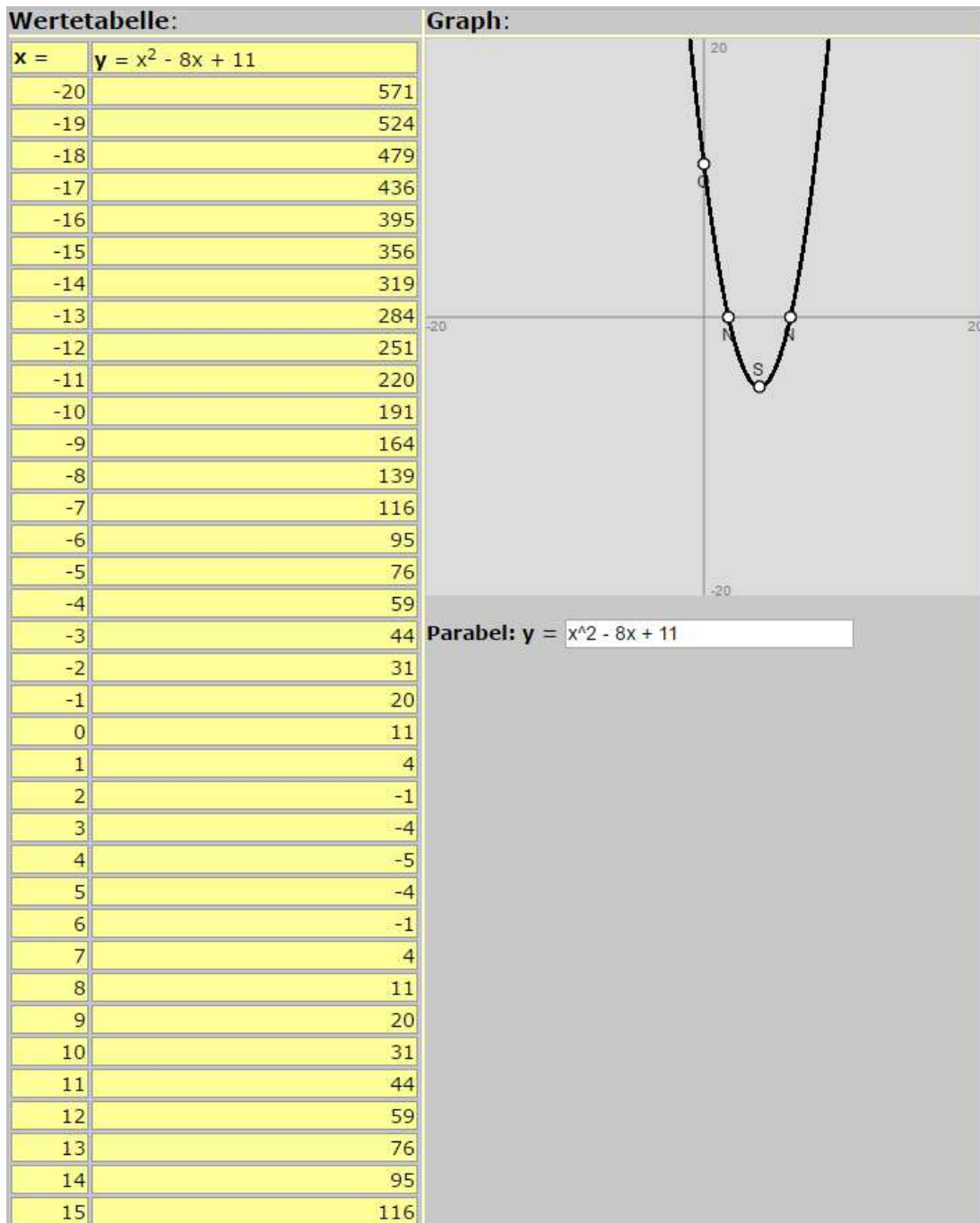
Die Parabelgleichung lautet also wegen $p=-8$ und $q=11$ in der Normalform: $y = x^2 - 8x + 11$.

III. Die Scheitelform der Parabelgleichung ergibt sich gemäß quadratischer Ergänzung:

$$y = x^2 - 8x + 11 = y = x^2 - 8x + 4^2 + 11 - 4^2 = (x-4)^2 - 5,$$

so dass als Scheitelpunkt S(4|-5) folgt.

IV. Wertetabelle und Graph der Parabel $y = x^2 - 8x + 11$ sind:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 221