

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Parabeln

Aufgabe: Eine nach oben geöffnete Normalparabel schneidet die x-Achse in den Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(3|0)$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel in Normal- und Scheitelform?

Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(d|c)$ ist ein (Funktions-) Term von der (Scheitel-) Form $y = (x-d)^2 + c$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Aus den beiden Nullstellen $N_1(x_1|0)$ und $N_2(x_2|0)$ einer Normalparabel ergibt sich die Produktform $y = (x-x_1)(x-x_2)$. Ausrechnen des Produkts führt auf die Normalform vom Typ $y = x^2 + px + q$. Quadratische Ergänzung mittels:

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

führt wieder auf die Scheitelform der Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(d|c) = S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$

(Letzteres ist auch eine Formel zur direkten Bestimmung des Scheitelpunktes einer Normalparabel).

Das Zeichnen der Normalparabel erfolgt über eine Wertetabelle oder vom gegebenen Scheitelpunkt aus, derart dass man – vom Scheitelpunkt oder vorhergehenden Parabelpunkt ausgehend – im x-y-Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1, 3, 5, 7, ... (ungerade Zahlen aufsteigend) Längeneinheiten nach oben geht.

II. Hinsichtlich der Bestimmung der Parabel gehen wir von der Produktform $y = (x-x_1)(x-x_2)$ aus und erhalten wegen der Nullstellen $N_1(-2|0)$ und $N_2(3|0)$ und wegen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ zunächst die Parabelgleichung:

$$y = (x-(-2))(x-3) = (x+2)(x-3).$$

Ausrechnen führt auf die Normalform der Parabel, also:

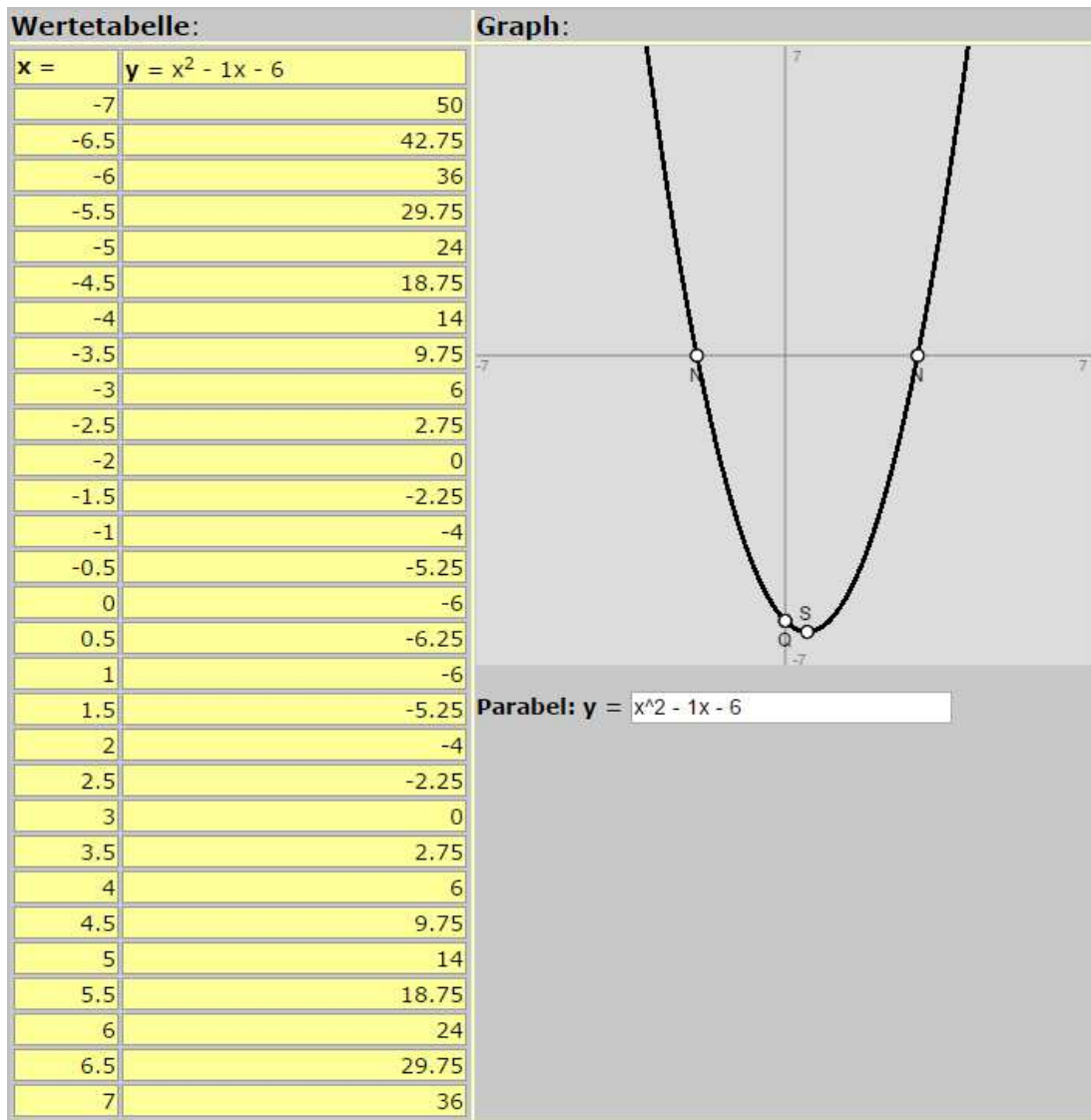
$$y = (x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6,$$

quadratisches Ergänzen auf die Scheitelform, also:

$$y = x^2 - x - 6 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6,25.$$

Der Scheitelpunkt der Normalparabel lautet: $S(0,5|-6,25)$.

III. Wertetabelle und Graph der Parabel $y = x^2 - x - 6$ sind:



www.michael-buhlmann.de / 04.2016 / Aufgabe 214