Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Parabeln

Aufgabe: Berechne zu den allgemeinen Parabeln (quadratischen Funktionen) die Schnittpunkte der Funktion mit den Achsen des x-y-Koordinatensystems:

a) $f(x) = 2x^2 - 8$ b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ c) $f(x) = x^2 - 9x + 8$

d) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$ e) $f(x) = -2x^2 - x + 3$ f) $f(x) = 5x^2 - 9x - 2$

Lösung: I. Allgemein sind mit den Achsenschnittpunkten von quadratischen Funktionen f(x) im x-y-Koordinatensystem der y-Achsenabschnittpunkt $S_y(0|f(0))$ (y-Achse) und die Nullstellen $N(x_1|0)$, $N(x_2|0)$ (x-Achse) gemeint. Mit dem Einsetzen von x = 0 in die Parabelgleichung errechnet sich f(0) und damit der y-Achsenabschnittpunkt $S_y(0|f(0))$ als Schnittpunkt mit der y-Achse. Die Nullstellen x_1, x_2 als Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmen sich vermöge der Gleichung f(x) = 0 als quadratische Gleichung:

$ax^2 + bx + c = 0$			
a ≠ 0, b = 0	a ≠ 0, c = 0	a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax+b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung („Mitternachtsformel“, a-b-c-Formel): D = $b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)

II. Wir wenden das in I. Gesagte zur Bestimmung der Achsenschnittpunkte an:

a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(x) = 2x^2 - 8$, x = 0 -> f(0) = -8 -> $S_y(0|-8)$;
Nullstellen: $f(x) = 2x^2 - 8$ = 0 ⇔ $2x^2 = 8$ ⇔ $x^2 = 4$ ⇔ x = ±2 -> N(-2|0), N(2|0).

b) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$, x = 0 -> f(0) = 4 -> $S_y(0|4)$;

Nullstellen: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ = 0 ⇔ $x^2 - 16 = 0$ ⇔ $x^2 = 16$ ⇔ x = ±4 -> N(-4|0), N(4|0).

c) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(x) = x^2 - 9x + 8$, x = 0 -> f(0) = 8 -> $S_y(0|8)$;

Nullstellen: $f(x) = x^2 - 9x + 8$ = 0 ⇔ $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2}$

⇔ x_1 = $\frac{9-7}{2}$ = 1, x_2 = $\frac{9+7}{2}$ = 8 -> N(1|0), N(8|0).

d) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$, x = 0 -> f(0) = 0 -> S_y(0|0);

Nullstellen: $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$ = 0 ⇔ x^2 – 10x = 0 ⇔ x(x-10) = 0 ⇔ x = 0, x-10 = 0 ⇔
x = 0, x = 10 -> N(0|0), N(10|0).

e) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(x) = -2x^2 - x + 3$, x = 0 -> f(0) = 3 -> S_y(0|3);

Nullstellen: $f(x) = -2x^2 - x + 3$ = 0 ⇔ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4}$

⇔ x_1 = $\frac{1+5}{-4}$ = -1,5, x_2 = $\frac{1-5}{-4}$ = 1 -> N(-1,5|0), N(1|0).

f) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(x) = 5x^2 - 9x - 2$, x = 0 -> f(0) = -2 -> S_y(0|-2);

Nullstellen: $f(x) = 5x^2 - 9x - 2$ = 0 ⇔ $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{10} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{10} = \frac{9 \pm 11}{10}$

⇔ x_1 = $\frac{9-11}{10}$ = -0,2, x_2 = $\frac{9+11}{10}$ = 2 -> N(-0,2|0), N(2|0).

www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Aufgabe 1812