

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Parabeln

Aufgabe: Gegeben ist die allgemeine Parabel (quadratische Funktion):

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x + 6)$$

- a) Gib die Nullstellen der Parabel an.
- b) Berechne den Scheitelpunkt S und die Scheitelform der Parabelgleichung.
- c) Skizziere den Graphen der quadratischen Funktion f(x).

Lösung: I. Die Nullstellen x_1, x_2 als Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmen sich vermöge der Gleichung $f(x) = 0$ als quadratische Gleichung:

$ax^2 + bx + c = 0$			
$a \neq 0, b = 0$	$a \neq 0, c = 0$	$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$	$a = 1, b = p, c = q$
$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x = 0 \vee ax + b = 0$ $x = 0 \vee ax = -b$ $x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a} < 0$), 1 Lösung (bei $c=0$), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a} > 0$)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung („Mitternachtsformel“, a-b-c-Formel): $D = b^2 - 4ac$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei $D < 0$) 1 Lösung (bei $D = 0$) 2 Lösungen (bei $D > 0$)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei $D < 0$) 1 Lösung (bei $D = 0$) 2 Lösungen (bei $D > 0$)

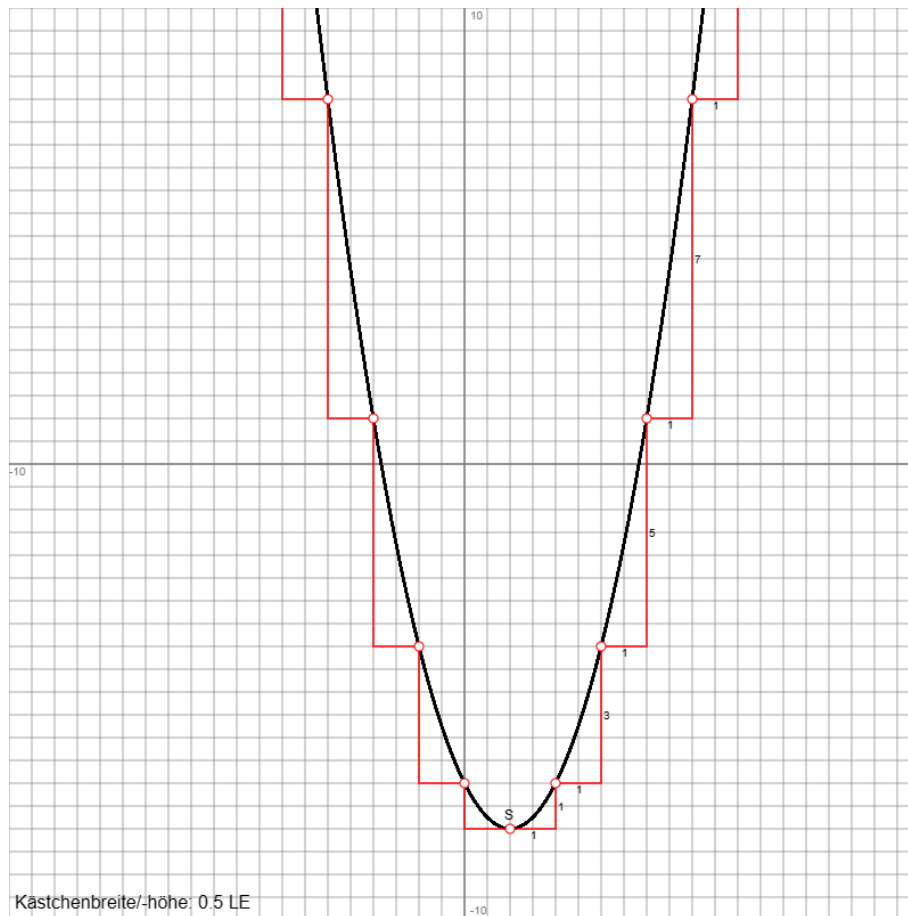
II. Der Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ ist das (relative, lokale) Minimum oder Maximum einer quadratischen Parabel. Er errechnet sich gemäß:

Scheitelform: $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S \rightarrow$ Scheitel $S(x_S|y_S)$

Normalform: $f(x) = ax^2+bx+c \rightarrow$ Scheitel $S(x_S|y_S)$ mit $x_S = -\frac{b}{2a}$, $y_S = f(-\frac{b}{2a})$

Produktform: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \rightarrow$ Scheitel $S(x_S|y_S)$ mit $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_S = f(\frac{x_1 + x_2}{2})$.

III. Ist die quadratische Parabel von der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$, so ist der Graph der Funktion $y = f(x)$ in einem geeigneten x-y-Koordinatensystem vom Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ aus zu skizzieren. In (horizontalen) Einerschritten bestimmen sich dann weitere Parabelpunkte als: $P/Q_1(x_S \pm 1 | y_S + 1 \cdot a) = (x_1 | y_1)$, $P/Q_2(x_S \pm 2 | y_S + 3 \cdot a) = (x_2 | y_2)$, $P/Q_3(x_S \pm 3 | y_S + 5 \cdot a) = (x_3 | y_3)$, $P/Q_4(x_S \pm 4 | y_S + 7 \cdot a) = (x_4 | y_4)$ (Berechnung mit Hilfe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ...) usw.



Auch das Anlegen einer Wertetabelle ist möglich u.a. gemäß:

x	x_S-3	x_S-2	x_S-1	x_S	x_S+1	x_S+2	x_S+3
y=f(x)	y_S+9a	y_S+4a	y_S+a	y_S	y_S+a	y_S+4a	y_S+9a

IV. a) Die Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x(x+6)$ liegt in der Produktdarstellung (Linearfaktorzerlegung) vor,

so dass die Nullstellen ohne weitere Rechnung als: $x = 0$, $x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ angegeben werden können: $N(-6|0)$, $N(0|0)$.

b) Der Scheitelpunkt S bestimmt sich mit:

Produktform: $f(x) = \frac{1}{2}x(x+6) = \frac{1}{2}(x-0)(x+6) \rightarrow x_1 = -6$, $x_2 = 0$ (als Nullstellen) \rightarrow

$x_S = \frac{-6+0}{2} = -3$, $y_S = f(-3) = \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot (-3+6) = \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot 3 = -4,5 \rightarrow$ Scheitel $S(-3|-4,5)$.

Wegen des Scheitelpunkts $S(-3|-4,5)$ ergibt sich als Scheitelform der Parabel (mit $a = 0,5$):

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4,5.$$

c) Auf Grund des bekannten Scheitelpunkts und der Scheitelform können wir den Graph gemäß III. wie folgt in ein entsprechendes x-y-Koordinatensystem einzeichnen:

