Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Parabeln

Aufgabe: Gegeben ist die allgemeine Parabel (quadratische Funktion):

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$$

a) Berechne die Nullstellen der Parabel und die Produktform der Parabelgleichung.
b) Berechne den Scheitelpunkt S und die Scheitelform der Parabelgleichung.
c) Skizziere den Graphen der quadratischen Funktion f(x).

Lösung: I. Die <u>Nullstellen</u> x_1, x_2 als Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmen sich vermöge der Gleichung f(x) = 0 als quadratische Gleichung:

$ax^2+bx+c=0$			
a ≠ 0, b = 0	a ≠ 0, c = 0	a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2+c=0$ $ax^2=-c$ $x^2=-\frac{c}{a}$ $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2+bx=0$ $x(ax+b)=0$ $x=0 \vee ax+b=0$ $x=0 \vee ax=-b$ $x=0 \vee x=-\frac{b}{a}$	$ax^2+bx+c=0$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x^2+px+q=0$ $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung („Mitternachtsformel", a-b-c-Formel): D = b^2-4ac als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)

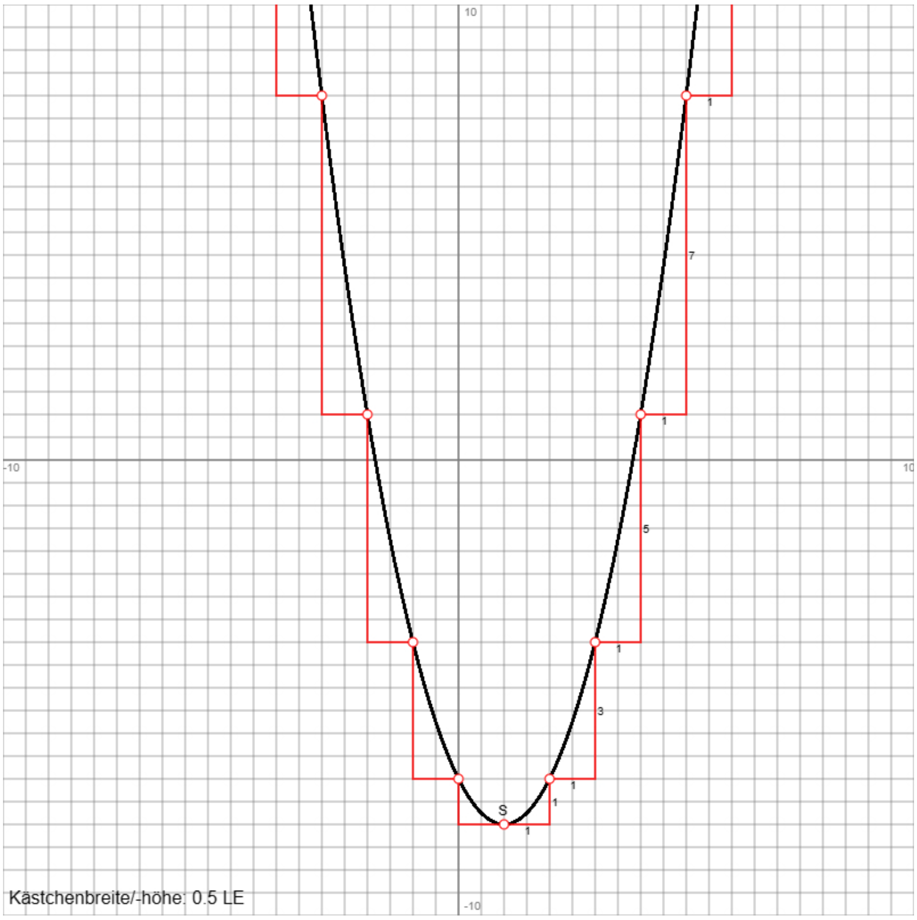
II. Der <u>Scheitelpunkt</u> $S(x_S|y_S)$ ist das (relative, lokale) Minimum oder Maximum einer quadratischen Parabel. Er errechnet sich gemäß:

Scheitelform: $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ -> Scheitel $S(x_S|y_S)$

Normalform: $f(x) = ax^2+bx+c$ -> Scheitel $S(x_S|y_S)$ mit $x_S = -\frac{b}{2a}$, $y_S = f(-\frac{b}{2a})$

Produktform: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ -> Scheitel $S(x_S|y_S)$ mit $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_S = f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

III. Ist die quadratische Parabel von der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$, so ist der Graph der Funktion $y = f(x)$ in einem geeigneten x-y-Koordinatensystem vom Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ aus zu skizzieren. In (horizontalen) Einerschritten bestimmen sich dann weitere Parabelpunkte als: $P/Q_1(x_S\pm1|y_S+1\cdot a) = (x_1|y_1)$, $P/Q_2(x_S\pm2|y_1+3\cdot a) = (x_2|y_2)$, $P/Q_3(x_S\pm3|y_2+5\cdot a) = (x_3|y_3)$, $P/Q_4(x_S\pm4|y_3+7\cdot a) = (x_4|y_4)$ (Berechnung mit Hilfe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, …) usw.



Auch das Anlegen einer Wertetabelle ist möglich u.a. gemäß:

x	x_S-3	x_S-2	x_S-1	x_S	x_S+1	x_S+2	x_S+3
y=f(x)	y_S+9a	y_S+4a	y_S+a	y_S	y_S+a	y_S+4a	y_S+9a

IV. a) Die Parabel $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$ liegt in der Normalform vor, so dass die Nullstellen etwa mit der a-b-c-Formel berechnet werden können. Es ist:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = 0$ | ·(-2)

$x^2 - 6x + 8 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -6, c = 8)

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1} = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{6\pm2}{2}$$

$x_1 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$, $x_2 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Die Nullstellen heißen also: N(2|0), N(4|0). Die Produktform der Parabelgleichung lautet mit a = -0,5:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$$

b) Der Scheitelpunkt S bestimmt sich mit:

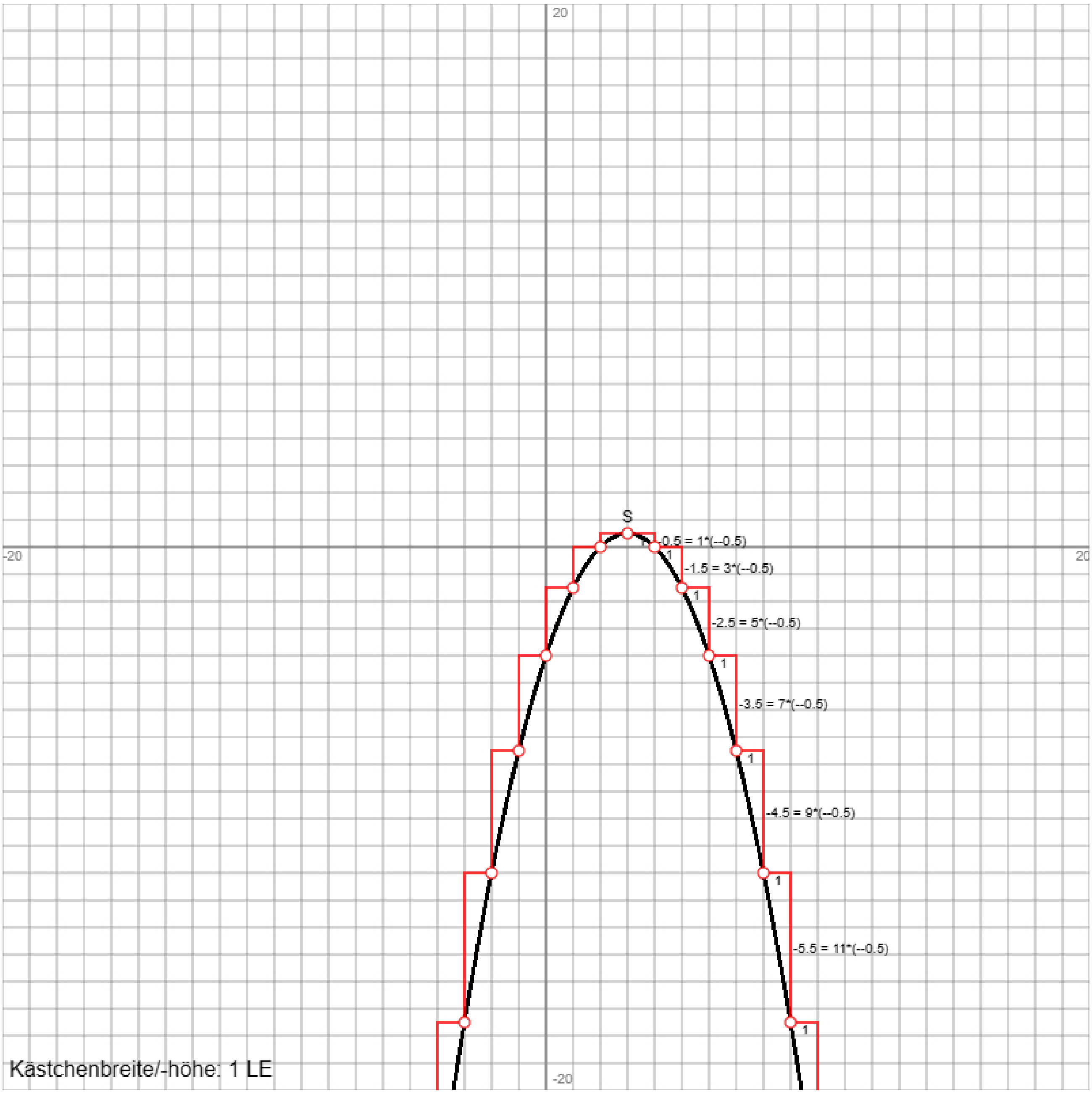
Normalform: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$ -> a = -0,5, b = 3 -> $x_S = -\frac{3}{2 \cdot (-0{,}5)}$ = 3, y_S = f(3) =

$-\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 4 = -4{,}5 + 9 - 4$ = 0,5 -> Scheitel S(3|0,5).

Wegen des Scheitelpunkts S(3|0,5) ergibt sich als <u>Scheitelform</u> der Parabel (mit a = -0,5):

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 0{,}5$.

c) Auf Grund des bekannten Scheitelpunkts und der Scheitelform können wir den <u>Graph</u> gemäß III. wie folgt in ein entsprechendes x-y-Koordinatensystem einzeichnen:



www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Aufgabe 1816