Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Parabeln

Aufgabe: Gegeben ist die (Standard-) Normparabel:

$$f(x) = x^2 .$$

a) Zeichne die Parabel f(x) in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem ein.

b) Die Parabel f(x) wird im Koordinatensystem um 1 nach rechts und um 2 nach unten verschoben sowie um den Faktor 0,5 gestaucht. Es entsteht die Parabel g(x). Gib die Scheitelform und den Scheitelpunkt der Parabel g(x) an. Gib die Normalform der Parabel g(x) an.

c) Berechne die Nullstellen der Parabel g(x).

d) Skizziere auch den Graphen der quadratischen Funktion g(x).

e) Weise nach, dass sich die Parabeln f(x) und g(x) nicht schneiden.

Lösung: I. Die <u>Nullstellen</u> x_1, x_2 als Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmen sich vermöge der Gleichung f(x) = 0 als quadratische Gleichung:

$ax^2+bx+c=0$			
a ≠ 0, b = 0	a ≠ 0, c = 0	a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0	a =1, b = p, c = q
$ax^2+c=0$ $ax^2=-c$ $x^2=-\frac{c}{a}$ $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$ax^2+bx=0$ $x(ax+b)=0$ $x=0 \vee ax+b=0$ $x=0 \vee ax=-b$ $x=0 \vee x=-\frac{b}{a}$	$ax^2+bx+c=0$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x^2+px+q=0$ $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$
Rein quadratische Gleichung: 0 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$<0), 1 Lösung (bei c=0), 2 Lösungen (bei $-\frac{c}{a}$>0)	Gemischt quadratische Gleichung (Ausklammern): 2 Lösungen	Gemischt quadratische Gleichung („Mitternachtsformel", a-b-c-Formel): D = b^2-4ac als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)	Gemischt quadratische Gleichung (p-q-Formel): D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ als Diskriminante -> 0 Lösungen (bei D<0) 1 Lösung (bei D=0) 2 Lösungen (bei D>0)

II. Der <u>Scheitelpunkt</u> $S(x_S|y_S)$ ist das (relative, lokale) Minimum oder Maximum einer quadratischen Parabel. Er errechnet sich gemäß:

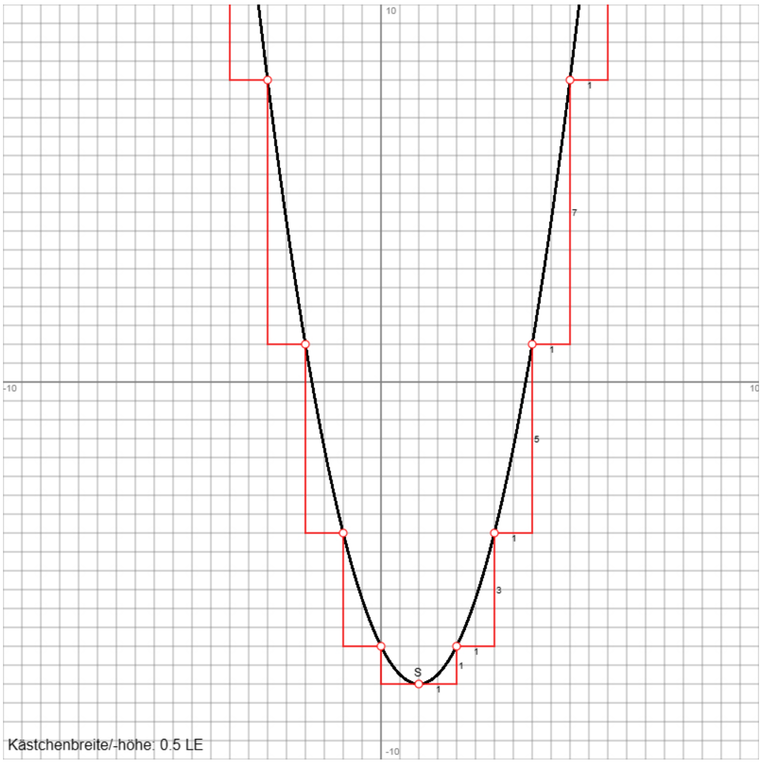
Scheitelform: $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$ -> Scheitel $S(x_S|y_S)$

Normalform: $f(x) = ax^2+bx+c$ -> Scheitel $S(x_S|y_S)$ mit $x_S = -\frac{b}{2a}$, $y_S = f(-\frac{b}{2a})$

Produktform: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ -> Scheitel $S(x_S|y_S)$ mit $x_S = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_S = f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

III. Ist die quadratische Parabel von der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$, so ist der <u>Graph</u> der Funktion y = f(x) in einem geeigneten x-y-Koordinatensystem vom Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ aus zu skizzieren. In (horizontalen) Einerschritten bestimmen sich dann weitere Parabelpunkte als:

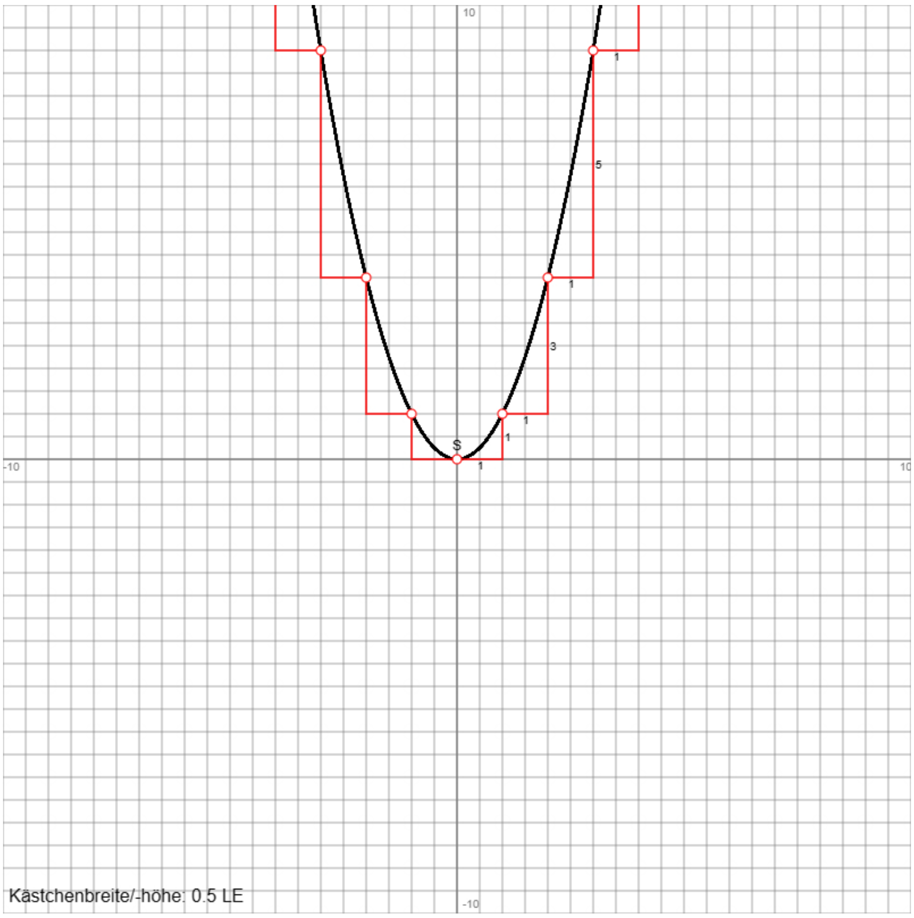
P/Q_1(x_S±1|y_S+1·a) = (x_1|y_1), P/Q_2(x_S±2|y_1+3·a) = (x_2|y_2), P/Q_3(x_S±3|y_2+5·a) = (x_3|y_3), P/Q_4(x_S±4|y_3+7·a) = (x_4|y_4) (Berechnung mit Hilfe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, …) usw.



Auch das Anlegen einer Wertetabelle ist möglich u.a. gemäß:

x	x_S-3	x_S-2	x_S-1	x_S	x_S+1	x_S+2	x_S+3
y=f(x)	y_S+9a	y_S+4a	y_S+a	y_S	y_S+a	y_S+4a	y_S+9a

IV. a) Der <u>Graph</u> der Normalparabel $f(x) = x^2$ kann gemäß III. wie folgt in ein x-y-Koordinatensystem eingezeichnet werden:



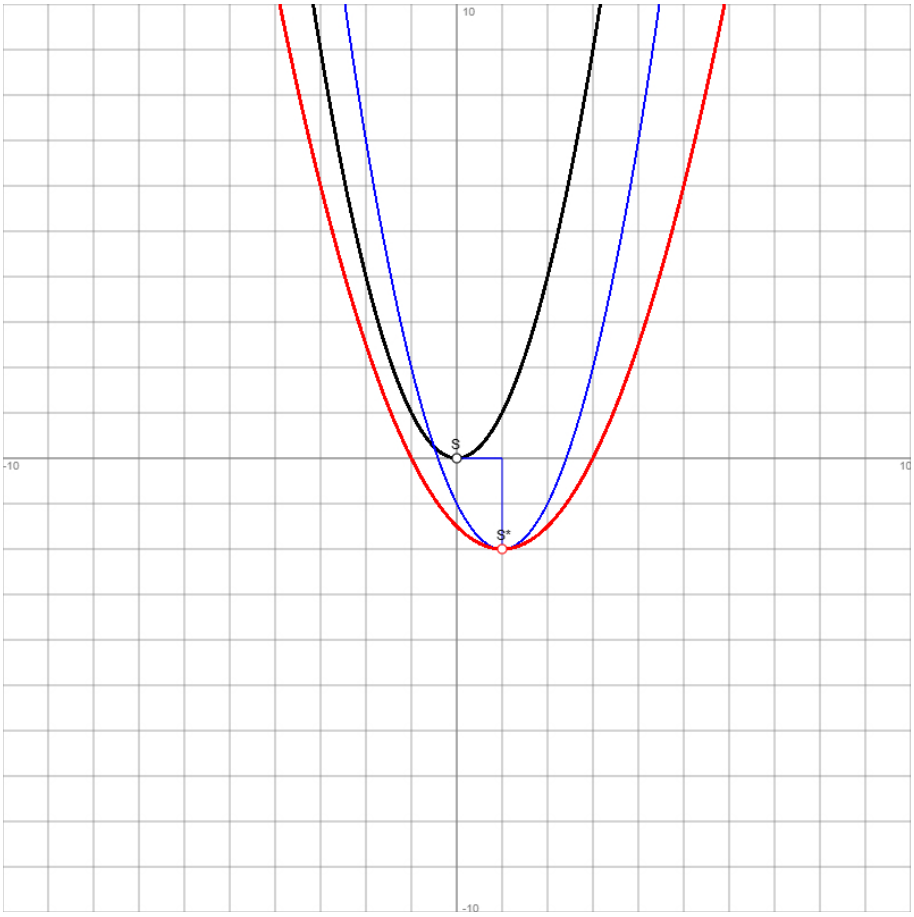
b) Die Parabel f(x) wird im Koordinatensystem um 1 nach rechts und um 2 nach unten verschoben sowie um den Faktor 0,5 gestaucht. Die entstehende Parabel g(x) hat somit die Scheitelform:

$$g(x) = \frac{1}{2} f(x-1) - 2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2\,.$$

Der Scheitelpunkt von g(x) ist folglich S*(1|-2). Die Normalform errechnet sich mit:

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 2 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$$

(unter Verwendung der 2. binomischen Formel).



c) Die Parabel $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ liegt in der Normalform vor, so dass die Nullstellen etwa mit der a-b-c-Formel berechnet werden können. Es ist:

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ | ·2

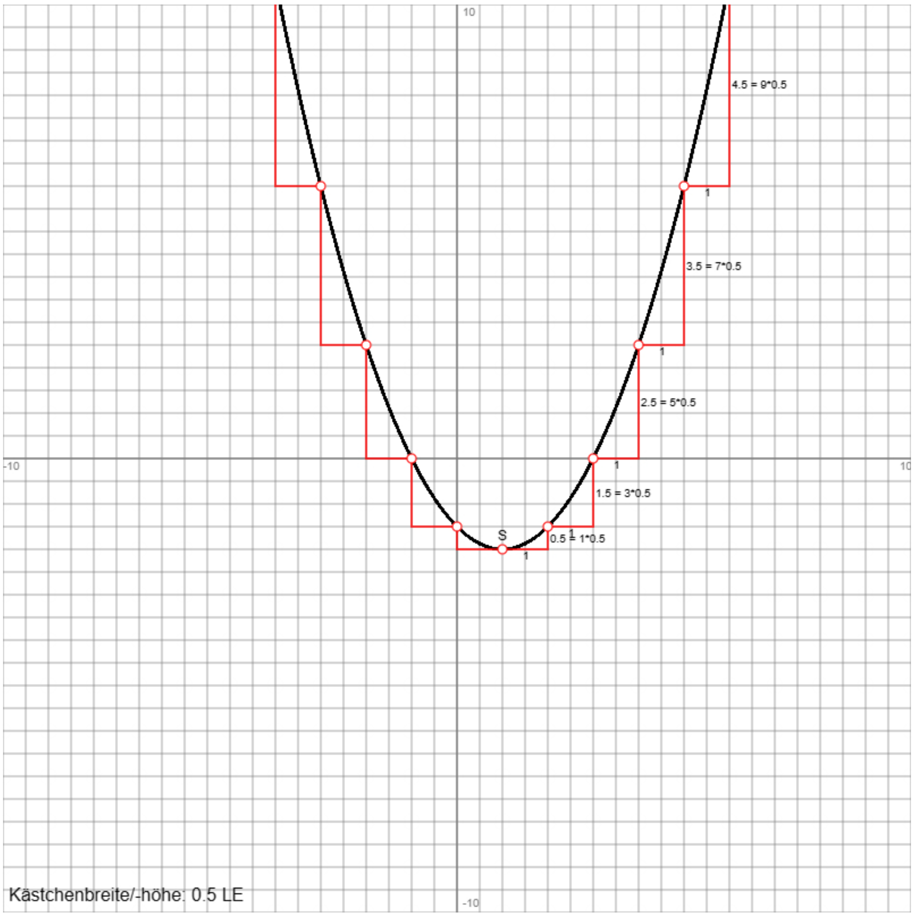
$x^2 - 2x - 3 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -2, c = -3)

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

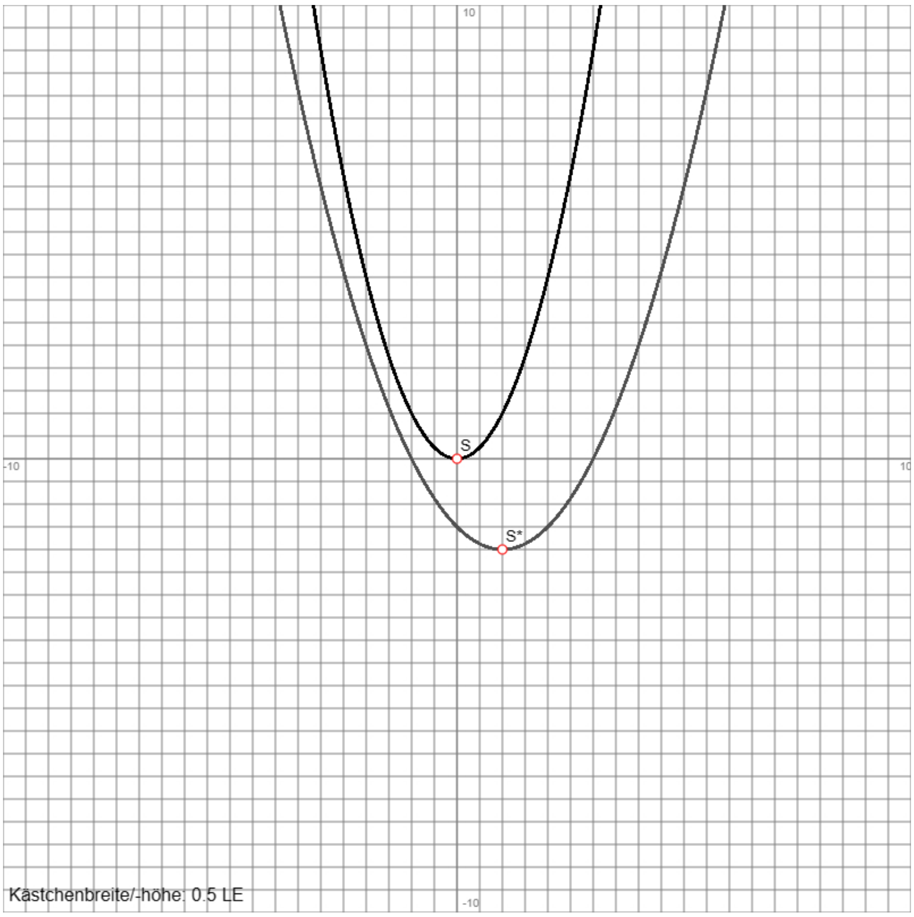
$x_1 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, $x_2 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Die Nullstellen von g(x) lauten: N(-1|0), N(3|0).

d) Der Graph der allgemeinen Parabel $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ kann gemäß III. wie folgt in ein x-y-Koordinatensystem eingezeichnet werden:



e) Die Graphen der beiden Parabeln laufen laut nachstehender Zeichnung aneinander vorbei; deshalb gibt es keine Schnittstellen.



Wir zeigen dies noch rechnerisch:

f(x) = g(x)

$x^2 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ | ·2

$2x^2 = x^2 - 2x - 3$ | $-x^2$

$x^2 = -2x - 3$ | +2x

$x^2 + 2x = -3$ | +3

$x^2 + 2x + 3 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = 2, c = 3)

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}.$$

Da die Diskriminante unter der Wurzel negativ ist, gibt es keine Lösungen der quadratischen Gleichung f(x) = g(x) und somit keine Schnittstellen zwischen den Parabeln f(x) und g(x).

www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Aufgabe 1817