Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Bestimme den Scheitelpunkt und die Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems für die allgemeine Parabel $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3$.

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer allgemeinen Parabel mit Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ ist ein (Funktions-) Term von der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$, $a\neq 0$, mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y=f(x) als Parabelgleichung. Wird gemäß der 2. binomischen Formel die Scheitelgleichung aufgelöst, so ergibt sich die Normalform der Parabel $f(x) = ax^2+bx+c$. Umgekehrt folgt aus der Normalform für den Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$: $x_S = -b/2a$, $y_S = f(x_S) = ax_S^2+bx_S+c$. Aus der Normalform sind ebenfalls die Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems zu erschließen. Und zwar gilt für die y-Achse: x=0 => y = f(0) = c mit dem y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$, für die x-Achse: f(x) = 0 => $ax^2+bx+c = 0$ => (eventuell existierende) Lösungen x_1, x_2 der quadratischen Gleichung (p-q-, a-b-c-Formel) mit den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

Für quadratische Gleichungen vom Typ $x^2+px+q = 0$ gilt die p-q-Formel:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

für Gleichungen vom Typ $ax^2+bx+c = 0$ die a-b-c-Formel:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

II. Der Scheitelpunkt der allgemeinen Parabel $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3$ errechnet sich mit:

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{0,5}{2\cdot 0,5}=-0,5 \text{ (a=0,5, b=05, c=-3)}$$

$$y_S=f(-0,5)=\frac{1}{2}(-0,5)^2+\frac{1}{2}(-0,5)-3=-3,125$$

als: S(-0,5|-3,125), so dass sich als Scheitelform der Parabel ergibt:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+0,5)^2-3,125.$$

III. Der y-Achsenabschnittspunkt ist wegen:
x=0 => f(0) = -3
der Punkt $Q=S_y(0|-3)$.

IV. Die Nullstellen der Parabel $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3$ errechnen sich u.a. nach der p-q-Formel für quadratische Gleichungen wie folgt:

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3=0 \qquad |\cdot 2$$

$x^2 + x - 6 = 0$ (p-q-Formel: p=1, q=-6)

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)}$$ (Ausrechnen)

$$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$$

x_1 = -0,5-2,5 = -3, x_2 = -0,5+2,5 = 2.

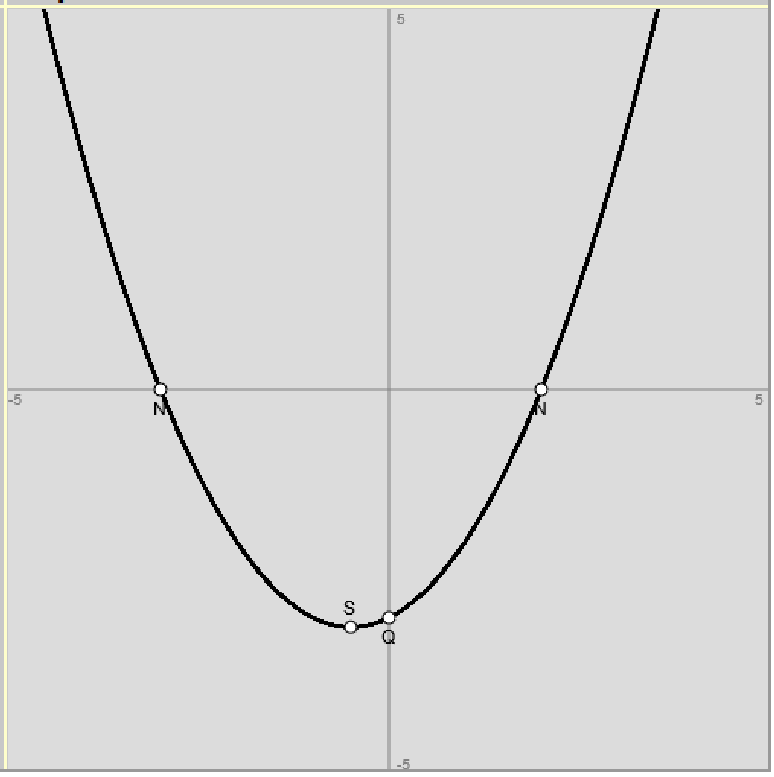
Die Nullstellen sind damit: $N_1(-3|0)$, $N_2(2|0)$.

V. Wertetabelle und Graph der Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$ sind:

Wertetabelle:

x =	**y** = 0.5x² + 0.5x - 3
-5	7
-4.5	4.875
-4	3
-3.5	1.375
-3	0
-2.5	-1.125
-2	-2
-1.5	-2.625
-1	-3
-0.5	-3.125
0	-3
0.5	-2.625
1	-2
1.5	-1.125
2	0
2.5	1.375
3	3
3.5	4.875
4	7
4.5	9.375
5	12

Graph:



2. Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer allgemeinen Parabel mit Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ ist ein (Funktions-) Term von der Scheitelform $f(x) = a(x-x_S)^2 + y_S$, $a \neq 0$, mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y=f(x) als Parabelgleichung. Wird gemäß der 2. binomischen Formel die Scheitelgleichung aufgelöst, so ergibt sich die Normalform der Parabel $f(x) = ax^2+bx+c$. Umgekehrt folgt aus der Normalform für den Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$: $x_S = -b/2a$, $y_S = f(x_S) = ax_S^2+bx_S+c$. Aus der Normalform sind ebenfalls die Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems zu erschließen. Und zwar gilt für die y-Achse: x=0 => y = f(0) = c mit dem y-Achsenabschnittspunkt $Q=S_y(0|c)$, für die x-Achse: f(x) = 0 => $ax^2+bx+c = 0$ => (eventuell existierende) Lösungen x_1, x_2 der quadratischen Gleichung (p-q-, a-b-c-Formel) mit den Nullstellen $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$.

Für quadratische Gleichungen vom Typ $x^2+px+q = 0$ gilt die p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,,$$

für Gleichungen vom Typ $ax^2+bx+c = 0$ die a-b-c-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

II. Der Scheitelpunkt der allgemeinen Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$ errechnet sich mit:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{0{,}5}{2 \cdot 0{,}5} = -0{,}5$$ (a=0,5, b=05, c=-3)

$$y_S = f(-0{,}5) = \frac{1}{2}(-0{,}5)^2 + \frac{1}{2}(-0{,}5) - 3 = -3{,}125$$

als: S(-0,5|-3,125), so dass sich als Scheitelform der Parabel ergibt:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 0{,}5)^2 - 3{,}125.$$

III. Der <u>y-Achsenabschnittspunkt</u> ist wegen:
x=0 => f(0) = -3
der Punkt Q=S_y(0|-3).

IV. Die <u>Nullstellen</u> der Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$ errechnen sich u.a. nach der a-b-c-Formel für quadratische Gleichungen wie folgt:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$$ (a-b-c-Formel: a=0,5, b=0,5, c=-3)

$$x_{1,2} = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 0{,}5}$$ (Ausrechnen)

$$x_{1,2} = \frac{-0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6}}{1} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = -0{,}5 \pm 2{,}5$$

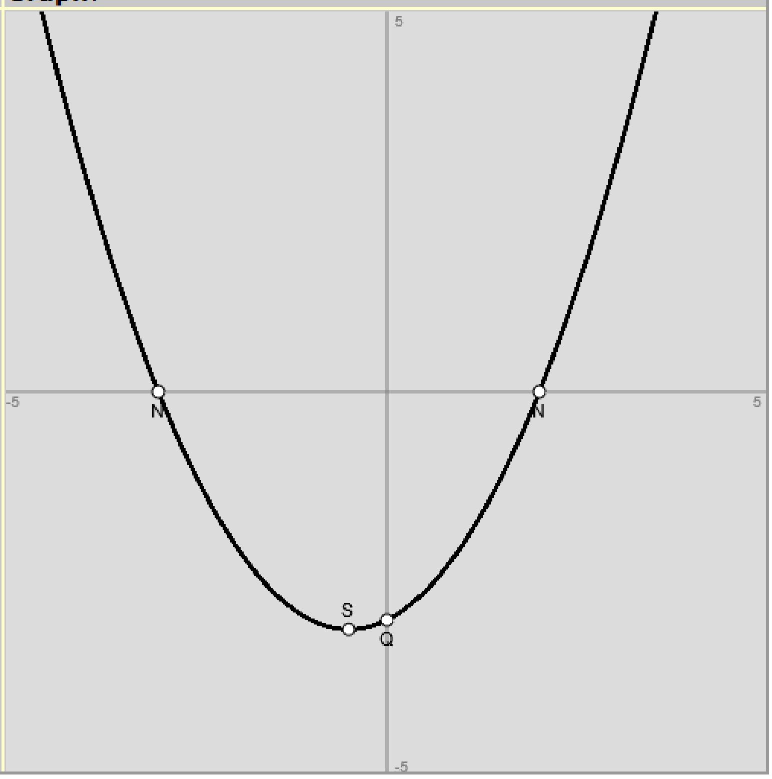
x_1 = -0,5-2,5 = -3, x_2 = -0,5+2,5 = 2.
Die Nullstellen sind damit: N_1(-3|0), N_2(2|0).

V. <u>Wertetabelle und Graph</u> der Parabel $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$ sind:

Wertetabelle:

x =	**y** = $0.5x^2 + 0.5x - 3$
-5	7
-4.5	4.875
-4	3
-3.5	1.375
-3	0
-2.5	-1.125
-2	-2
-1.5	-2.625
-1	-3
-0.5	-3.125
0	-3
0.5	-2.625
1	-2
1.5	-1.125
2	0
2.5	1.375
3	3
3.5	4.875
4	7
4.5	9.375
5	12

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 346