Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: a) Verschiebe die Normalparabel p_1: $y = x^2 - 4x + 1$ im x-y-Koordinatensystem um 2 Längeneinheiten nach links und 5 Längeneinheiten nach oben. Wie lautet die Gleichung der durch die Verschiebung entstandenen Normalparabel p_2?

b) Wie lautet die Gerade durch die Scheitelpunkte der beiden Parabeln p_1 und p_2?

c) Wo schneiden sich die beiden Parabeln p_1 und p_2?

Lösung: a) I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten Normalparabel mit Scheitelpunkt S(d|c) ist ein (Funktions-) Term von der (Scheitel-) Form $y = (x-x_S)^2 + y_S$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Ausrechnen der Scheitelform unter Benutzung der binomischen Formeln führt auf die Normalform vom Typ $y = x^2 + px + q$. Quadratische Ergänzung mittels:

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

führt umgekehrt wieder auf die Scheitelform der Normalparabel mit Scheitelpunkt S(d|c) = $S(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2)$ (Letzteres ist auch eine Formel zur direkten Bestimmung des Scheitelpunktes einer Normalparabel).

Verschiebungen von Normalparabeln im x-y-Koordinatensystem um a Längeneinheiten nach rechts bzw. links (a>0 bzw. a<0) führen auf die Funktionsgleichung:

$$y = (x-a)^2 + p(x-a) + q = \left(x + \frac{p}{2} - a\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

um b Längeneinheiten nach oben bzw. unten (b>0 bzw. b<0) auf:

$$y = x^2 + px + q + b = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + b.$$

II. Der Scheitelpunkt der Parabel p_1: $y = x^2 - 4x + 1$ errechnet sich mit:

$x_S = -\frac{p}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$ (p=-4)

$y_S = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$

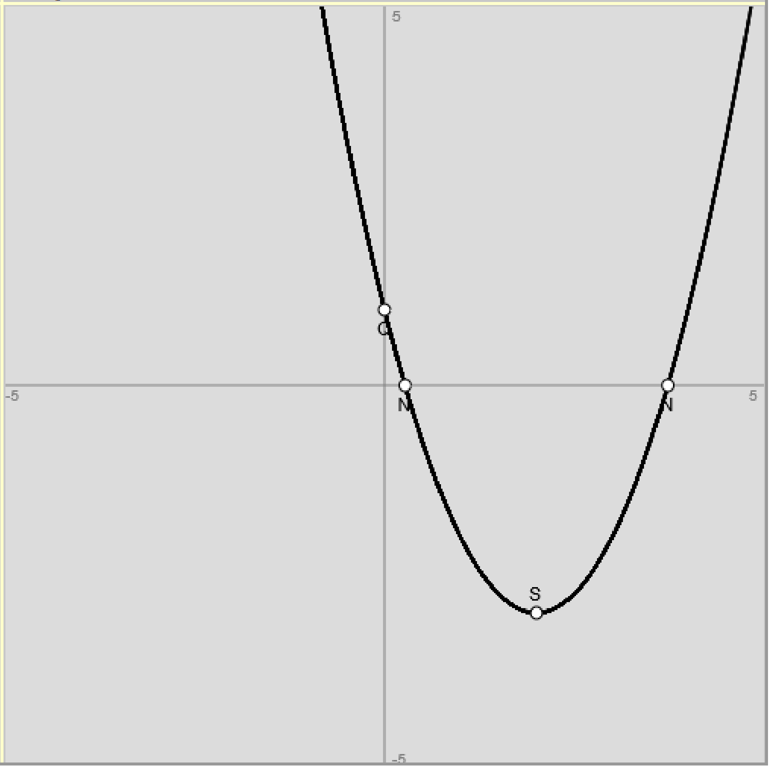
als: $S_1(2|-3)$, so dass sich als Scheitelform der Normalparabel ergibt:

p_1: $y = (x-2)^2 - 3$.

III. Wertetabelle und Graph der Parabel p_1: $y = x^2 - 4x + 1$ sind:

Wertetabelle:	
x =	y = 1x² - 4x + 1
-5	46
-4.5	39.25
-4	33
-3.5	27.25
-3	22
-2.5	17.25
-2	13
-1.5	9.25
-1	6
-0.5	3.25
0	1
0.5	-0.75
1	-2
1.5	-2.75
2	-3
2.5	-2.75
3	-2
3.5	-0.75
4	1
4.5	3.25
5	6

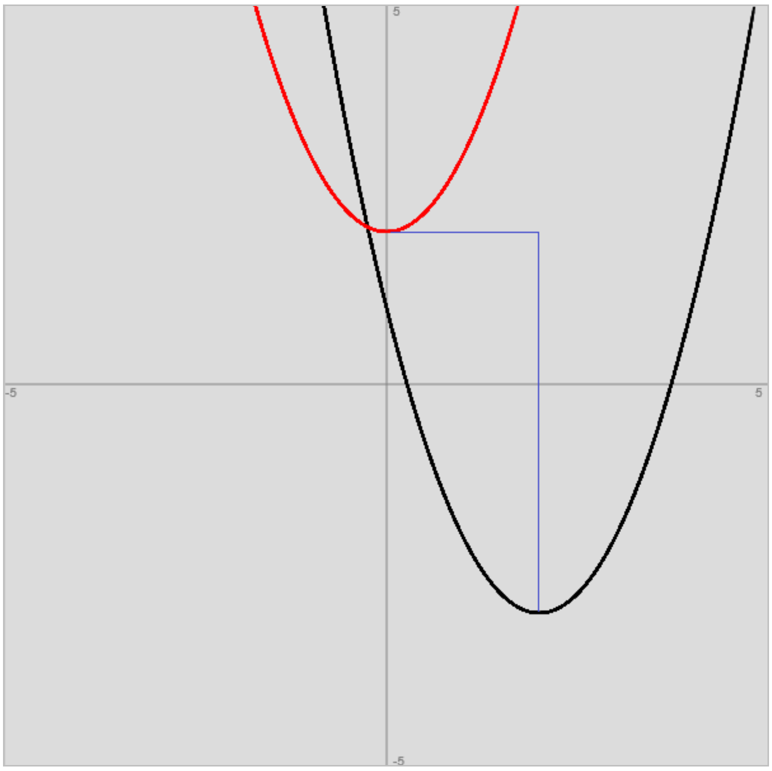
Graph:



IV. Die <u>Verschiebung</u> der Parabel p_1: $y=(x-2)^2-3$ um 2 Längeneinheiten (LE) nach links und 5 Längeneinheiten nach oben zur Parabel p_2 erfolgt über den Scheitelpunkt $S_1(2|-3)$, der zum Scheitelpunkt $S_2(2–2|-3+5) = S_2(0|2)$ wird (x-Koordinate: 2 LE nach links -> -2; y-Koordinate: 5 LE nach oben -> +5). Die verschobene Normalparabel lautet somit in der Scheitelform:

p_2: $y=(x-0)^2+2=x^2+2$,

die gleichzeitig auch die Normalform der Parabel p_2 ist.



b) I. Die Funktionsvorschrift einer <u>allgemeinen Geraden</u> ist ein (Funktions-) Term von der Form y = mx + b mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y (Geradengleichung). Sind hinsichtlich einer Geradenbestimmung zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ gegeben, so ist die folgenden Vorgehensweise möglich: Der Berechnung der Steigung mit dem Differenzenquotienten $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ der Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ folgt das Einsetzen etwa des Punktes P in die Geradengleichung y = mx + b, um b als $b = y_1 – mx_1$ zu bestimmen.

II. Mit $S_1(2|-3)$ und $S_2(0|2)$ ergibt sich für die <u>Gerade</u> y = mx +b durch die beiden Scheitelpunkte:

$S_1(2|-3)$, $S_2(0|2)$ => $m = \frac{2-(-3)}{0-2} = \frac{5}{-2} = -2{,}5$ => y = -2,5x +b

$S_2(0|2)$ => 2 = -2,5·0 + b = b => y = -2,5x + 2.

Die gesuchte Gerade lautet damit: y = -2,5x + 2.

c) I. Den <u>Schnittpunkt</u> zwischen zwei Normalparabeln bestimmen sich durch Gleichsetzen der Parabelterme p_1: $y = x^2+p_1x+q_1$ und p_2: $y = x^2+p_2x+q_2$ als:

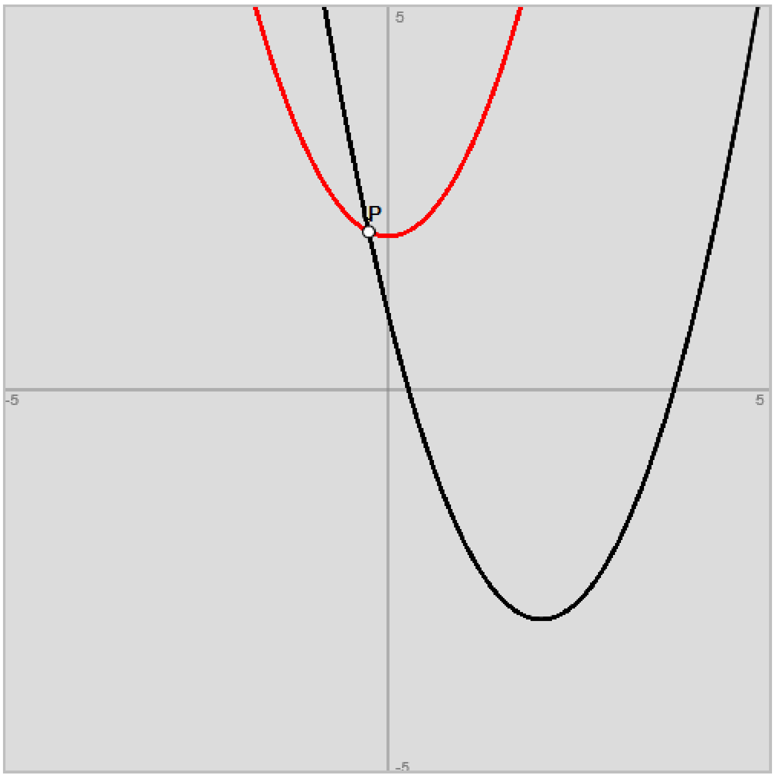
$x^2+p_1x+q_1 = x^2+p_2x+q_2$	$\mid -x^2$
$p_1x+q_1 = p_2x+q_2$	$\mid -p_2x, -q_1$
$(p_1–p_2)x = q_2–q_1$	$\mid (p_1–p_2)$
$x = (q_2–q_1)/(p_1–p_2)$	$(p_1 \neq p_2)$

Einsetzen des errechneten x-Wertes in eine der beiden Parabelgleichungen führt auf die y-Koordinate des Schnittpunktes und damit auf den Schnittpunkt $P(x_0|y_0)$.

II. Wir setzen zur Bestimmung des Schnittpunktes die Parabelterme p_1: $y = x^2 - 4x + 1$ und p_2: $y = x^2 + 2$ gleich. Also:

$x^2–4x+1 = x^2+2$	$\mid -x^2$
$-4x+1 = 2$	$\mid -1$
$-4x = 1$	$\mid :(-4)$
$x = -0{,}25$	

mit: $y = (-0{,}25)^2+2 = 2{,}0625$. Der Schnittpunkt lautet: P(-0,25|2,0625).



www.michael-buhlmann.de / 05.2017 / Aufgabe 347