Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabelmodellierung

Aufgabe: Eine Brücke ist zwischen zwei 320 m (Meter) weit auseinanderliegenden Pylonen an zwei Stahlseilen links und rechts der Brückenfahrbahn aufgehängt. Für je eines dieser Stahlseile gilt: Der niedrigste Punkt des Stahlseils befindet sich 4 m über der Brückenfahrbahn; das Stahlseil ist an den Pylonen in einer Höhe von jeweils 44 m über der Fahrbahn befestigt.

a) Bestimme eine Parabelgleichung, die das Stahlseil zwischen den Pylonen und oberhalb der Brückenfahrbahn beschreibt.

b) Die Brücke ist an den zwei Stahlseilen aufgehängt und zwar jeweils an der Brückenmitte und an den zwei Punkten genau zwischen Brückenmitte und Pylonen. Berechne die Gesamtlänge aller dieser senkrechten Verstrebungen zwischen den Stahlseilen und der Brückenfahrbahn.

Lösung: a) I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer allgemeinen Parabel mit Scheitelpunkt S(0|c) auf der y-Achse ist ein (Funktions-) Term von der (Scheitel-, Normal-) Form $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Ist $a>0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet, bei $a<0$ nach unten. Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse (Nullstellen) folgen, falls existent, aus:

$$y = 0 \Leftrightarrow ax^2+c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

mit: $N_1(-\sqrt{-\frac{c}{a}}|0)$, $N_2(\sqrt{-\frac{c}{a}}|0)$. Die Funktionsgleichung der allgemeinen Parabel $y = ax^2 + c$ ergibt sich aus der Bestimmung der Unbekannten a und c wie folgt:

1. Ist c ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts S(0|c) und liegt mit $P(x_1|y_1)$ ($x_1 \neq 0$) ein Punkt auf der Parabel, so lässt sich a auf Grund der Punktprobe (Einsetzen des Punktes P in die Parabelgleichung) berechnen als:

$$y_1 = ax_1+c \Leftrightarrow y_1-c = ax_1 \Leftrightarrow a = \frac{y_1 - c}{x_1}.$$

2. Liegen mit $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ ($x_1,x_2 \neq 0$, $x_1 \neq \pm x_2$) zwei Punkte auf der Parabel, so ergibt die Punktprobe mit beiden Punkten ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten a und c:

$$(1)\ y_1 = ax_1+c$$
$$(2)\ y_2 = ax_2+c.$$

Subtraktion der Gleichungen voneinander führt auf:

$$(2)-(1)\ y_2-y_1 = ax_2-ax_1 = a(x_2-x_1) \Leftrightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

durch das Einsetzen von $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ etwa in Gleichung (1) ergibt sich der Wert für c:

$$(1)\ y_1 = ax_1+c = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1+c \Leftrightarrow c = y_1-\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1.$$

II. Bei der Bestimmung der allgemeinen Parabelgleichung gehen wir wie folgt vor. Gemäß dem Ansatz der Funktionsgleichung als $y = ax^2 + c$ legen wir das x-y-Koordinatensystem so über den Längsschnitt der Brücke, dass der Tiefpunkt der Parabel als niedrigster Punkt des Stahlseils auf der y-Achse liegt und die Brückenfahrbahn mit der x-Achse übereinstimmt. Da der niedrigste Punkt des Stahlseils sich 4 m über der Fahrbahn befindet, ist der Scheitelpunkt der Parabel: S(0|4). Die Pylone platzieren sich an den Stellen x = -160 und x = 160 als halben Abstand zwischen den Pylonen von 320 m bzw. Abstand zwischen dem Tiefpunkt des Stahlseils und je einem Pylon von 160 m in x-Richtung. Das Stahlseil ist an den Pylonen in 44 m Höhe über der Fahrbahn befestigt, so dass die Punkte P(-160|44) und Q(160|44) auf der Parabel liegen.
Wir bestimmen in $y = ax^2 + c$ zunächst c als y-Koordinate des Scheitelpunkts und damit als: c = 4. Die Parabelgleichung lautet nun: $y = ax^2 + 4$. Punktprobe mit Q(160|44) ergibt zudem:

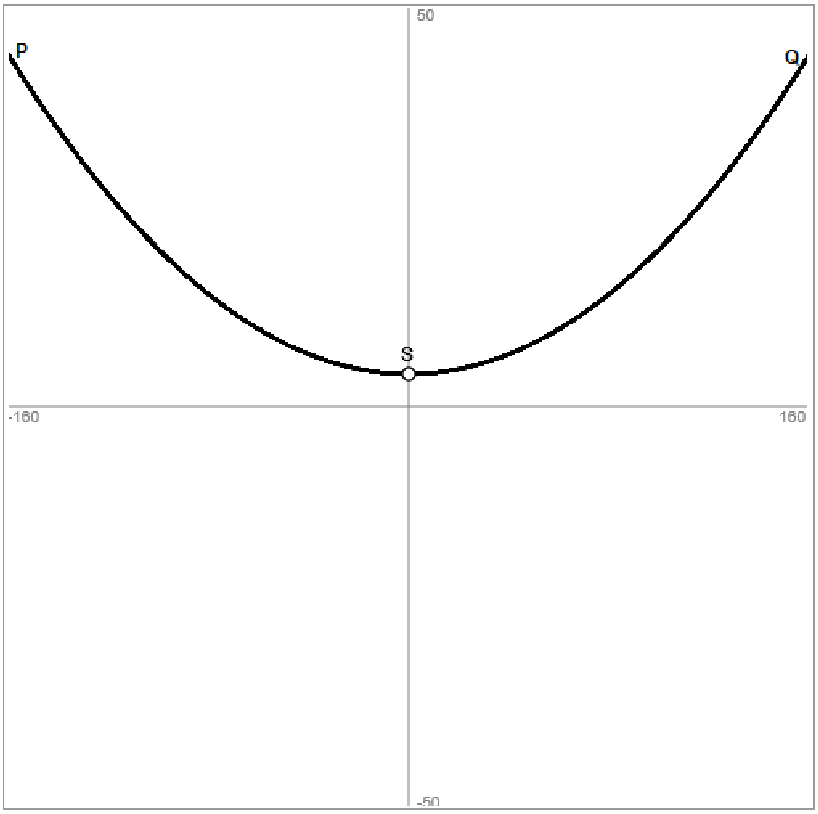
$$44 = a\cdot 160^2 + 4 \Leftrightarrow 40 = a\cdot 160^2 \Leftrightarrow a = \frac{40}{160^2} = \frac{1}{640} = 0{,}0015625.$$

Die Parabelgleichung lautet also: $y = \frac{1}{640}x^2 + 4$.

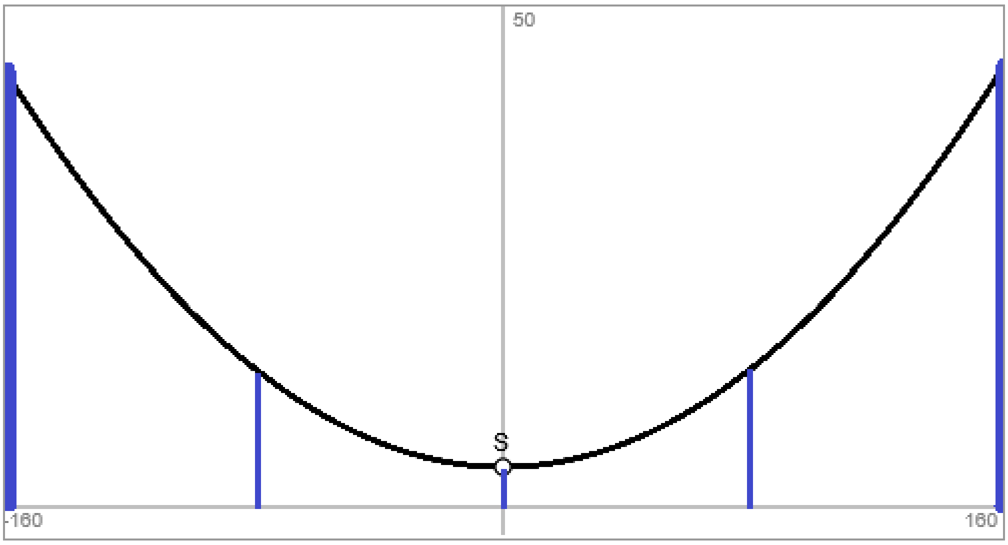
III. Wertetabelle und Graph der allgemeinen Parabel $y = \frac{1}{640}x^2 + 4$ sind:

Wertetabelle:	
x =	**y** = $0.0015625x^2 + 4$
-160	44
-150	39.1563
-140	34.625
-130	30.4063
-120	26.5
-110	22.9063
-100	19.625
-90	16.6563
-80	14
-70	11.6563
-60	9.625
-50	7.9063
-40	6.5
-30	5.4063
-20	4.625
-10	4.1563
0	4
10	4.1563
20	4.625
30	5.4063
40	6.5
50	7.9063
60	9.625
70	11.6563
80	14
90	16.6563
100	19.625
110	22.9063
120	26.5
130	30.4063
140	34.625
150	39.1563
160	44

Graph:



b) Hinsichtlich der <u>Gesamtlänge</u> der Aufhängungen ist zu beachten, dass zwischen Brückenfahrbahn und niedrigstem Punkt eines Stahlseils die Entfernung 4 m beträgt (Scheitel S(0|4)). Auf halber Strecke zwischen Brückenmitte und Pylon, also bei x = -80 bzw. x = 80 beträgt die Länge einer Aufhängung $y = \frac{1}{640} \cdot 80^2 + 4 = 14$ m. Die Gesamtlänge der Verstrebungen ist damit wegen der zwei Stahlseile, an denen die Brücke aufgehängt ist: $L = 2\cdot(14+4+14) = 64$ m.



www.michael-buhlmann.de / 06.2018 / Aufgabe 580