Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabelmodellierung

Aufgabe: Ein Ball wird aus einer Höhe von 2 Metern über einer Abwurflinie im Erdboden geworfen. Die annähernd parabelförmige Flugbahn des Balls erreicht mit 6 Metern die größte Höhe, der Ball schlägt in 20 Metern horizontaler Entfernung von der Abwurflinie auf dem Erdboden auf. Bestimme eine Parabelgleichung, die die Flugbahn des Balls beschreibt.

Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer allgemeinen Parabel mit Scheitelpunkt S(0|c) auf der y-Achse des x-y-Koordinatensystems ist ein (Funktions-) Term von der (Scheitel-, Normal-) Form $y = ax^2 + c$ ($a\neq0$) mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Ist $a>0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet, bei $a<0$ nach unten. Die Funktionsgleichung der allgemeinen Parabel $y = ax^2 + c$ ergibt sich aus der Bestimmung der Unbekannten a und c wie folgt: Ist c ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts S(0|c) und liegt mit $P(x_1|y_1)$ ($x_1\neq0$) ein Punkt auf der Parabel, so lässt sich a auf Grund der Punktprobe (Einsetzen des Punktes P in die Parabelgleichung) berechnen als:

$$y_1 = ax_1^2+c \Leftrightarrow y_1-c = ax_1^2 \Leftrightarrow a = \frac{y_1-c}{x_1^2}.$$

Hier ist indes die Bestimmung des Koeffizienten a schwieriger, da die Position der Abwurflinie auf der x-Achse des x-y-Koordinatensystems nicht bekannt ist, ebenso die der Nullstelle der Parabel. Es sind lediglich die 20 Meter Differenz zwischen Abwurflinie x_1 und Nullstelle x_1+20 bekannt. daraus ergibt ein (nicht lineares) Gleichungssystem, das mit den Punkten $P(x_1|2)$ (2 Meter Höhe über der Abwurflinie) und $N(x_1+20|0)$ (als Parabelnullstelle) die Bestimmung der Unbekannten x_1 und auch a ermöglicht.

II. Bei der Bestimmung der allgemeinen Parabelgleichung gehen wir wie folgt vor. Gemäß dem Ansatz der Funktionsgleichung als $y = ax^2 + c$ legen wir das x-y-Koordinatensystem so, dass der Hochpunkt der Wurfparabel als Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt. Wir bestimmen in $y = ax^2 + c$ zunächst c als y-Koordinate des Scheitelpunkts S(0|6) (6 Meter als höchste Entfernung des Balls vom Erdboden) und damit als: $c = 6$. Die Parabelgleichung lautet nun: $y = ax^2 + 6$.
In diese Parabelgleichung setzen wir mittels Punktprobe jeweils die Punkte $P(x_1|2)$ und $N(x_1+20|0)$ ein und erhalten ein Gleichungssystem:

$P(x_1|2)$: $2 = ax_1^2 + 6 \Leftrightarrow -4 = a\,x_1^2 \Leftrightarrow a = \frac{-4}{x_1^2}$ (1)

$N(x_1+20|0)$: $0 = a(x_1+20)^2 + 6 \Leftrightarrow -6 = a(x_1+20)^2 \Leftrightarrow a = \frac{-6}{(x_1+20)^2}$ (2).

Gleichsetzen der Terme (1) und (2) ergibt:

$$\frac{-4}{x_1^2} = \frac{-6}{(x_1+20)^2} \Leftrightarrow \frac{4}{x_1^2} = \frac{6}{(x_1+20)^2} \Leftrightarrow 4(x_1+20)^2 = 6x_1^2 \Leftrightarrow 4x_1^2 + 160x_1 + 1600 = 6x_1^2 \Leftrightarrow$$

$$0 = 2x_1^2 - 160x_1 - 1600 \Leftrightarrow 0 = x_1^2 - 80x_1 - 800 \Leftrightarrow x_1 = 40\pm\sqrt{40^2+800} = 40\pm\sqrt{2400} = 40\pm20\sqrt{6}.$$

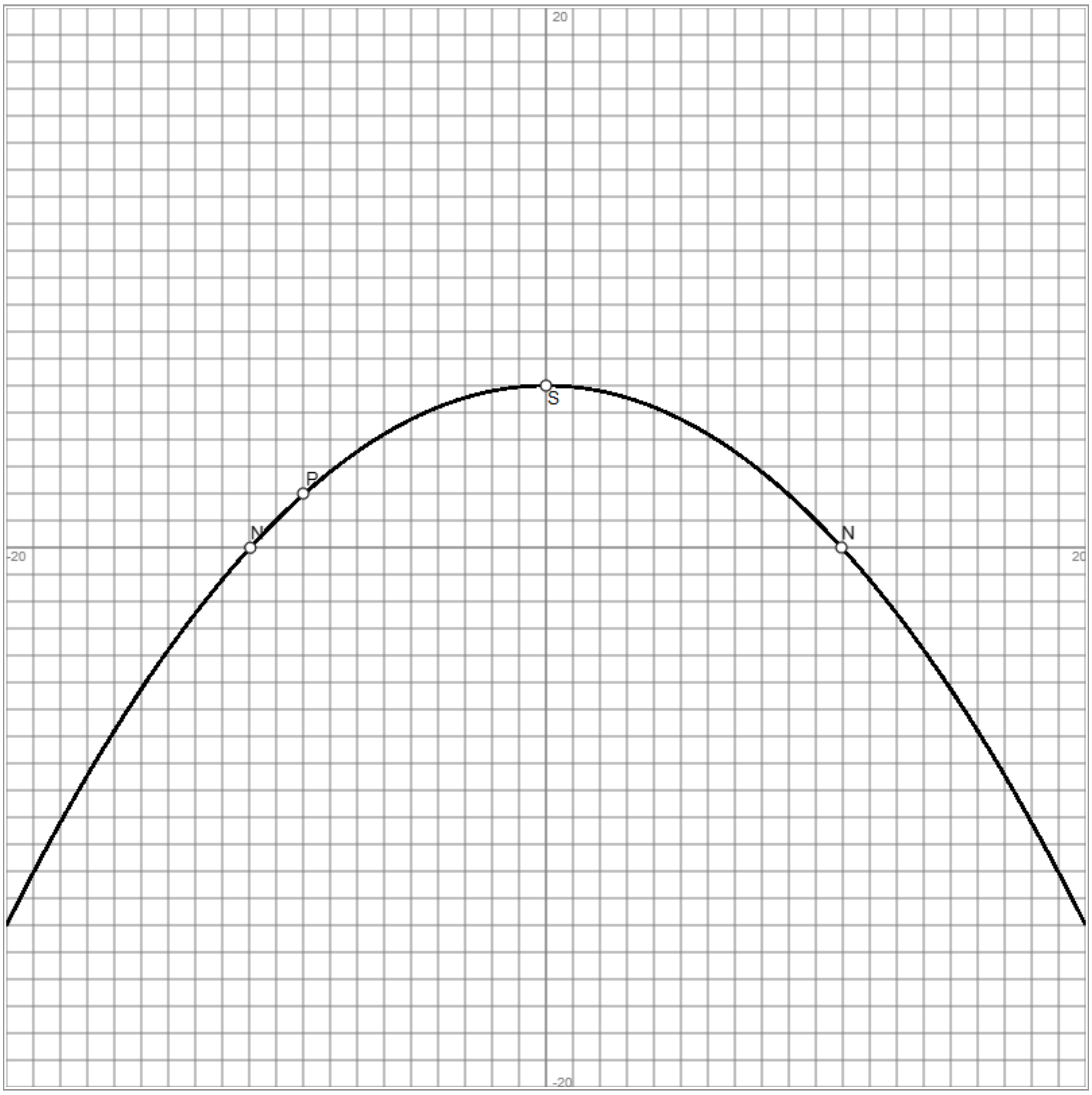
Wegen $-20 \le x_1 \le 20$ kann nur $x_1 = 40-20\sqrt{6} = -9$ als Lösung für die Abwurflinie gelten, so dass sich als Abwurfpunkt des Balls der Punkt P(-9|2) ergibt. Der Ball schlägt damit im Punkt N(11|0) auf dem Erdboden auf. Der Koeffizient a der Parabel errechnet sich als:

$a = \frac{-4}{(-9)^2} = -0{,}05.$

Die Parabelgleichung lautet also: $y = -0{,}05x^2 + 6$.

III. Der <u>Graph</u> der allgemeinen Parabel $y = -0{,}05x^2 + 6$ (mit den Punkten P, S und N) hat das Aussehen:

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 03.2024 / Aufgabe 2031