Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Der Graph einer nach oben geöffneten Normalparabel verläuft durch die Punkte P(-2|3) und Q(4|3). Wie lautet die Funktionsgleichung der Parabel?

1. Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten Normalparabel lautet gemäß der Normalform $y = x^2 + bx + c$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren) sind nach der Punktprobe der zwei vorgegebenen Parabelpunkte die Koeffizienten b und c zu bestimmen.

II. Hinsichtlich der Bestimmung der Funktionsgleichung der Normalparabel gehen wir von der (Normal-) Form $y = x^2 + bx + c$ aus und erhalten wegen der Punktprobe (Einsetzen) der Punkte P(-2|3) und Q(4|3) das lineare Gleichungssystem:

P(-2|3) ($x = -2$, $y = 3$, $y = x^2+bx+c$ ->): $3 = (-2)^2 + b\cdot(-2) + c$ => $3 = 4 – 2b + c$
Q(4|3) ($x = 4$, $y = 3$, $y = x^2+bx+c$ ->): $3 = 4^2 + b\cdot 4 + c$ => $3 = 16 + 4b + c$

Wir formen das lineare Gleichungssystem um und wenden das Additionsverfahren an, indem wir z.B. Gleichung (2) mit -1 multiplizieren

(1) $3 = 4 - 2b + c$	
(2) $3 = 16 + 4b + c$	$\| \cdot(-1)$
(1) $3 = 4 - 2b + c$	
(2‘) $-3 = -16 - 4b - c$	(Addition der Gleichungen (1) und (2’))
(3) $0 = -12 - 6b$	$\| +6b$
$6b = -12$	$\| :6$
$b = -2$	
(1) $3 = 4 - 2b + c$	(Einsetzen von $b = -2$ in Gleichung (1))
$3 = 4 - 2\cdot(-2) + c$	
$3 = 8 + c$	$\| -8$
$-5 = c$	

Die Parabelgleichung lautet also wegen $b = -2$ und $c = -5$ in der Normalform: $y = x^2 – 2x – 5$.

2. Lösung: I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten Normalparabel lautet gemäß der Scheitelform $y = (x-d)^2 + e$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Der Punkt S(d|e) ist der Scheitelpunkt der Parabel und bestimmt sich aus zwei vorgegebenen Parabelpunkte die Koeffizienten $P(x_1|y_0)$, $Q(x_2|y_0)$, die dieselbe y-Koordinate haben, vermöge:

$$d = \frac{x_1 + x_2}{2},\ e = y_0 - (x_1 - d)^2 = y_0 - (x_2 - d)^2.$$

Die x-Koordinate d des Scheitelpunkts S ist also die Mitte der x-Koordinaten x_1, x_2 der Punkte $P(x_1|y_0)$, $Q(x_2|y_0)$, die y-Koordinate e des Scheitelpunkts S errechnet sich, indem von der y-Koordinate y_0 der Punkte $P(x_1|y_0)$, $Q(x_2|y_0)$ das Quadrat der Differenz zwischen der x-Koordinate x_1 oder x_2 eines der vorgegebenen Punkte P, Q und der x-Koordinate des Scheitelpunktes d abgezogen wird. Diese Vorgehensweise zur Bestimmung einer Parabelgleichung beruht damit auf der Achsensymmetrie einer Normalparabel zur Senkrechten durch den Scheitelpunkt.

II. Zur Bestimmung des Scheitelpunkts der Normalparabel berechnen wir wegen der vorgegebenen Punkte P(-2|3) und Q(4|3) (mit: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$) zunächst die x-Koordinate des Parabelscheitels S(d|e):

$$d = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Die x-Koordinate d = 1 des Scheitelpunkts liegt damit offensichtlich in der Mitte zwischen -2 und 4, der Abstand bzw. die Differenz zwischen d = 1 und 4 beträgt 4 – 1 = 3, so dass sich (mit: $y_0 = 0$) die y-Koordinate des Parabelscheitels S(d|e) ergibt als:

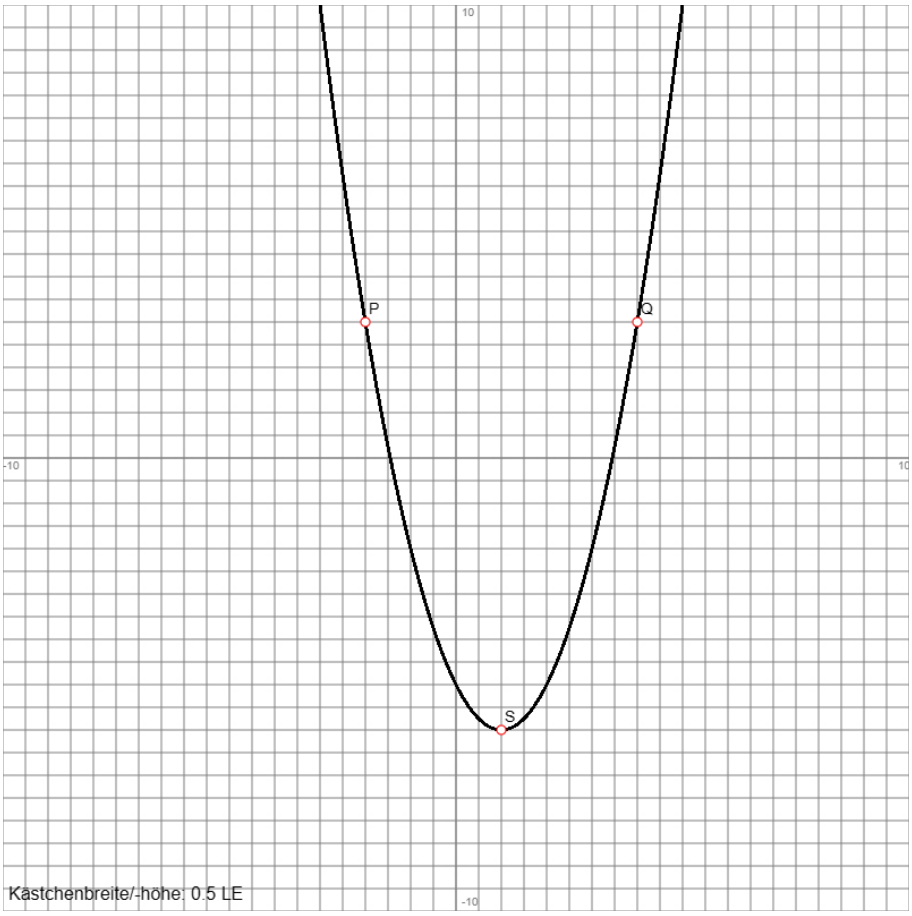
$$e = 3 - 3^2 = -6.$$

Der Scheitelpunkt lautet damit: S(1|-6). Die Scheitelform der gesuchten Parabel ist:

$$y = (x-1)^2 - 6,$$

die Normalform lautet (unter Verwendung der 2. binomischen Formel):

$$y = (x-1)^2 - 6 = x^2 - 2x + 1 - 6 = x^2 - 2x - 5.$$



www.michael-buhlmann.de / 03.2024 / Aufgabe 2035